Laurent, Hermann
Sur les principes
fondamentaux

Scientia

CN

H. Laurent

Sur les principes fondamentaux de la Théorie des nombres et de la Géométrie

N° 20

C. NAUD. Éditeur

Monsieur C. Jordan, membre de l'Institut

Hommage respectueux et affectueux

H. Laurent

SCIENTIA

Juin 1902. IYS. — MATHÉMATIQUE

n° 20.

SUR LES PRINCIPES FONDAMENTAUX
DE LA THÉORIE DES NOMBRES
ET DE LA GÉOMÉTRIE

PAR

H. LAURENT

TABLE DES MATIÈRES

SUR LES PRINCIPES FONDAMENTAUX

DE LA THÉORIE DES NOMBRES

ET DE LA GÉOMÉTRIE

INTRODUCTION

Pour bien raisonner, on admet généralement avec Pascal qu'il faut prouver ce qui est obscur et n'employer dans les démonstrations que des *axiomes très évidents* ou des propositions déjà accordées ou démontrées.

Mais un axiome très évident pour l'un, ne l'est pas pour un autre, et je crois qu'il vaudrait mieux dire : pour bien raisonner il faut ne faire qu'un petit nombre d'hypothèses, et en chercher les conséquences logiques.

Au fond ces deux manières de concevoir l'art de raisonner sont identiques, car un axiome très évident n'est qu'une hypothèse très plausible. Mais si le fond est le même, la forme est différente au moins dans les applications ; la doctrine des axiomes très évidents a peut-être l'inconvénient de laisser de côté la question de savoir si ces axiomes ne sont pas des conséquences les uns des autres.

Il est curieux d'observer ce qu'est pour nous un axiome très évident ; les hommes de ma génération qui ont suivi les cours de mathématiques spéciales de notre époque, se rappellent, sans doute, que l'on admettait comme un axiome très évident : qu'une courbe continue ayant manifestement une tangente, toute fonction continue devait avoir une dérivée ; une première affirmation nous laissait un peu sceptiques, mais en allant en avant, la foi nous venait. On connaît le sort du prétendu axiome en question.

Or parmi les axiomes que je pourrais appeler classiques, il y en a une foule qui ne méritent ce nom que parce que nous les avons acceptés sur la simple affirmation d'un maître. On nous a affirmé que le postulatum d'Euclide n'était pas évident, nous nous sommes inclinés, on nous a affirmé qu'un angle *retourné* était susceptible de coïncider avec sa position ancienne, nous nous sommes inclinés, on nous aurait affirmé le contraire, nous nous serions également inclinés. L'éducation première a laissé son empreinte, et nous regardons comme des axiomes très évidents, ce que l'on nous a habitués à regarder comme des axiomes très évidents. A l'ancienne définition de l'axiome, *vérité évidente par elle-même*, on doit donc substituer la suivante infiniment plus exacte :

Un axiome est une proposition que l'atavisme, l'éducation, l'autorité du maître nous ont fait accepter comme vraie sans examen, et surtout, sans nous préoccuper de savoir ce qu'est au fond pour nous une vérité.

Il est temps, je crois, de renoncer à la doctrine des axiomes pour lui substituer celle des hypothèses. Dans cet ordre d'idées une vérité est une hypothèse plausible ou une conséquence logique d'hypothèses non contradictoires.

On sait qu'en se plaçant à ce point de vue, le grand géomètre Sophus Lie, qui a été, peut-être sans le vouloir, un grand philosophe, a résolu pour la première fois une question de métaphysique sinon en nous révélant la nature de l'espace, au moins en détruisant les idées erronées qui s'étaient propagées à travers les âges, sur la valeur des axiomes énoncés ou sous-entendus dans Euclide et ses continuateurs.

J'ai essayé comme l'on fait MM. Tannery, Méray, Cosserat de fonder la théorie des nombres sur un petit nombre d'hypothèses, mais en suivant une tout autre voie ; je me suis bien vite aperçu que les axiomes énoncés, ou sous-entendus dans les traités élémentaires d'arithmétique et d'algèbre, pouvaient être considérablement réduits ; et pour cela il m'a suffi de donner une définition nette et précise de la *quantité* et du nombre. J'espère avoir réussi, sans avoir recours à des considérations transcendantes.

Comme on le voit, je me place au point de vue *utilitaire* ; MM. Méray, Tannery, Cosserat se placent à un point de vue *esthétique*. Pour moi les mathématiques pures ont pour objet l'étude des quantités à l'aide des nombres ; pour MM. Tannery, et Cosserat les mathématiques pures sont un exercice de logique.

Je ne ferai, comme on le verra, que quatre hypothèses que je mets franchement en relief :

1° *Je raisonne juste* (hypothèse de tout raisonnement).

2° La quantité sera définie, *je suppose qu'il existe des quantités.*

3° *Il y a des quantités susceptibles d'être divisées en autant de parties égales qu'on voudra* (je définirai la division en parties égales).

4° *Quand une quantité croît sans cesse, (ou décroît sans cesse) sans devenir plus grande (ou plus petite) qu'une quantité fixe, elle a une limite.*

Si l'on fait ces hypothèses, il n'y a plus *d'axiomes très évidents.* On DÉMONTRERA que pour ajouter une somme à une quantité, il suffit de lui ajouter chacune des parties de la somme, qu'une différence ne change pas quand on ajoute ou quand on retranche une même quantité à ses deux termes, etc.

ÉGALITÉ ET ADDITION

Deux choses qui ne diffèrent en rien l'une de l'autre sont une seule et même chose ; car si elles étaient distinctes, elles différeraient par une qualité quelconque, elles n'auraient pas par exemple le même mode d'existence dans le temps ou dans l'espace, la même couleur, etc., permettant de dire qu'elles sont distinctes.

Il est commode de dire que deux objets qui ne diffèrent en rien l'un de l'autre, et qui par suite ne sont qu'un seul même objet, sont des objets identiques.

Des objets matériels ou immatériels, sans être identiques, peuvent avoir une propriété commune ; si alors, par la pensée, on fait abstraction de toutes leurs autres propriétés, ils ne diffèrent plus en rien, ils deviennent identiques ; et pour exprimer ce fait, on dit qu'ils sont *égaux.*

Deux objets *égaux* sont donc deux objet jouissant d'une même propriété énoncée ou sous-entendue et dont on laisse de côté les autres propriétés.

Il n'y a là rien de conventionnel de ma part, et je ne fais que préciser une idée que nous nous faisons tous de l'*égalité.* L'égalité est une propriété toute relative, et qui dépend du point de vue auquel on se place. Ainsi un cheval est l'égal d'une poule, quand, faisant abstraction de toutes leurs autres propriétés, on les considère l'un et l'autre comme des animaux.

Si des objets A et B sont égaux à un objet C, A et B sont égaux entre eux, par *définition.*

Considérons maintenant des objets A, B, C, D,.., aussi différents les uns des autres que l'on voudra par leurs propriétés, combinons ces objets entre eux de manière à constituer un objet S, en procédant, toutefois, comme on va le dire... On combinera A avec B, en suivant une certaine règle, et l'on obtiendra un objet B′; on combinera, en suivant la même règle, B′ avec C et l'on obtiendra un objet C′; et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on trouve un objet S. L'opération finale portera le nom d'*addition*, si le résultat S ne dépend pas de l'ordre suivi en combinant A, B, C... Si, par exemple, on obtient encore S en combinant B avec A, ce qui donne A″, puis A″ avec D, ce qui donne D″, et ainsi de suite, en employant tous les objets considérés dans la première série d'opérations.

S'il arrive qu'un objet puisse être supprimé sans que le résultat de l'addition en soit altéré, on dira que cet objet est nul ou de nul effet.

On considérera deux objets comme égaux, quand on obtiendra l'un en ajoutant à l'autre un objet nul; en d'autres termes, on fera abstraction de la propriété qu'ont les objets d'être associés par addition à des objets nuls.

Le résultat de l'addition de A, B, C... portera le nom de *somme* ou *total* des objets A, B, C...; A, B, C,... seront les parties de la somme S. Donc :

Une somme reste la même, *par définition*, quel que soit l'ordre dans lequel on ajoute ses parties.

QUANTITÉS

Si un objet A peut s'obtenir en ajoutant à B un objet C qui n'est pas nul, on dit que A est plus grand que B et que C ; B et C sont plus petits que A.

Considérons maintenant une suite illimitée d'objets, A, B, C... Supposons que ces objets, en vertu d'une règle déterminée, soient susceptibles d'être ajoutés et que la somme de deux quelconques d'entre eux fasse partie de la suite A, B, C... Supposons en outre que deux quelconques d'entre eux A, B étant choisis arbitrairement, il résulte de la règle adoptée pour faire l'addition, que A soit égal à B, soit plus petit que B ou soit plus grand que B ; le système de ces objets A, B, C,... formera un système de *quantités homogènes* ou de *même espèce.*

Ainsi des quantités homogènes sont des choses que l'on peut ajouter, supposer égales entre elles, plus grandes ou plus petites les unes que les autres.

Je fais cette hypothèse, qu'il existe au moins une espèce de quantités homogènes.

PROPRIÉTÉS DES QUANTITÉS

Soit A une quantité plus grande que B, on obtient par définition A en ajoutant une quantité C à B, on dit que C est la différence entre A et B. Si $+$ est le signe de l'addition, $=$ celui de l'égalité,

$$A = B + C \tag{1}$$

exprimera que A est la somme de B et C, et que C est la différence entre A et B ; on dit que l'on obtient C en soustrayant B de A. — étant le signe de la soustraction, la formule (1) et la suivante

$$A - B = C$$

expriment la même idée.

Il est facile de prouver que la soustraction ne peut se faire que d'une seule manière.

c'est-à-dire que si

$$A - B = C, \qquad A - B' = C, \tag{1}$$

on a forcément

$$B = B'.$$

En effet, dire que $A - B = C$, c'est dire que $A = B + C$, de même $A = B' + C$, or si B et B′ ne sont pas égaux, on aura par exemple $B' = B + \alpha$ et

$$B + C = B + \alpha + C$$

ce qui exprime que α est de nul effet dans l'addition, c'est-à-dire est nul, et il est permis de ne pas en tenir compte, donc $B = B'$. Ainsi les formules

$$A - B = A - B'$$

entraînent la conséquence

$$B = B'.$$

Il est facile de voir que si

$$A + B = A + B'$$

on aura aussi

$$B = B,$$

car si $B' = B + \alpha$, par exemple,

$$A + B = A + B + \alpha$$

ce qui veut dire que α est nul.

Si $A > C$ on aura

$$A - C + C = A + C - C = A.$$

En effet $A - C$ est, par définition, une quantité telle qu'en lui ajoutant C, on a A; et $A + C - C$ est une quantité H telle que

$$A + C = H + C;$$

donc, en vertu du théorème précédent, $H = A$, c. q. f. d.

Soit maintenant N une quantité plus grande que A, B, $A + B$ et en général assez grande pour que les opérations $N - A + B$, $N - B - A$, $N - A + B$ soient possibles.

Par définition on a

$$N + A + B = N + B + A,$$

je dis que l'on aura aussi

$$N - A + B = N + B - A,$$

appelons H_1 et H_2 les deux membres de cette formule, il faut prouver que $H_1 = H_2$. Or

$$H_1 + A = (N - A) + B + A = (N - A) + A + B$$
$$= N - A + A + B = N + B$$

on a ensuite

$$H_2 + A = N + B - A + A = N + B,$$

donc

$$H_1 + A = H_2 + A$$

d'où l'on conclut $H_1 = H_2$, c. q. f. d.

Je dis que l'on aura encore

$$N - A - B = N - B - A.$$

Appelons H_1 et H_2 les deux membres de cette formule; il faut prouver que $H_1 = H_2$. On a

$$H_1 + B = N - A - B + B = N - A;$$

on a ensuite

$$H_2 + B = N - B - A + B = (N - B) - A + B,$$

ou, en vertu du théorème précédent,

$$H_2 + B = (N - B) + B - A = N - B + B - A = N - A;$$

donc

$$H_1 + B = H_2 + B \qquad \text{et} \qquad H_1 = H_2, \text{ c. q. f. d.}$$

On a

$$N + A + B = N + (A + B).$$

En effet

$$N + A + B = A + B + N = (A + B) + N = N + (A + B).$$

On a si $A > B$

$$N + A - B = N + (A - B),$$

car

$$N + A - B = A - B + N = (A - B) + N = N + (A - B).$$

On a si $A < B$

$$N + A - B = N - (B - A).$$

Soit H_1 le premier membre, H_2 le second ; il faut prouver que $H_1 = H_2$. On a

$$H_1 + (B - A) = H_1 + B - A = N + A - B + B - A = N,$$
$$H_2 + (B - A) = N - (B - A) + (B - A) = N,$$

donc $H_1 = H_2$, c. q. f. d.

Comme conséquence

$$N - A + B = N - (A - B) \quad \text{si} \quad A > B$$
$$= N + (B - A) \quad \text{si} \quad B > A.$$

On a

$$N - A - B = N - (A + B).$$

En effet ajoutant $(A + B)$ au premier membre, on a

$$N + (A + B) - A - B = N + A + B - A - B = N,$$

en ajoutant $(A + B)$ au second on a aussi N, ce qui démontre le théorème.

Généralisation

Soient N, A, B, C,.. des quantités de même espèce, une expression de la forme

$$(1) \qquad N \pm A \pm B \pm \ldots\ldots \pm L$$

est ce que nous appellerons un *polynôme*.

Quand deux polynômes seront égaux, nous dirons qu'ils ont la même valeur.

Les quantités N et $\pm A$, $\pm B$,... considérées avec les signes $+$ ou $-$ qui les précèdent seront les *termes* du polynôme (1), Les termes précédés du signe $+$ et le premier N seront dits *positifs*, ceux qui sont précédés du signe $-$ seront dits *négatifs*. Dans un terme, il y a à considérer son *signe* $+$ ou $-$ et sa *valeur absolue*, c'est-à-dire la quantité qui entre dans ce terme.

Les quantités positives, négatives ou nulles portent le nom de quantités algébriques.

On appelle *somme* algébrique de deux quantités algébriques, la somme de leurs valeurs absolues, précédée du signe commun, si elles sont de même signe, et leur différence précédé du signe de la plus grande, si elles sont de signes contraires. (On regarde comme précédées du signe $+$ dans ces définitions les quantités qui ne sont précédées d'aucun signe.)

Une quantité algébrique peut être représentée par une seule lettre, ainsi $-$ A peut être représenté par a en sorte que si $+$ B est représenté par b on aura

$$\begin{aligned} a+b &= (-\mathrm{A}) + (+\mathrm{B}) \\ &= \mathrm{B}-\mathrm{A} \quad \text{si } \mathrm{B} > \mathrm{A} \\ &= -(\mathrm{A}-\mathrm{B}) \quad \text{si } \mathrm{B} < \mathrm{A}. \end{aligned}$$

Cela posé, reprenons les formules du § précédent :

$$\mathrm{N}+\mathrm{A}+\mathrm{B} = \mathrm{N}+(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \tag{1}$$

$$\mathrm{N}+\mathrm{A}-\mathrm{B} = \begin{cases} \mathrm{N}+(\mathrm{A}-\mathrm{B}) \quad \text{si } \mathrm{A} > \mathrm{B} & (2) \\ \mathrm{N}-(\mathrm{B}-\mathrm{A}) \quad \text{si } \mathrm{A} < \mathrm{B} & (3) \end{cases}$$

$$\mathrm{N}-\mathrm{A}-\mathrm{B} = \mathrm{N}-(\mathrm{A}+\mathrm{B}). \tag{4}$$

On peut les résumer en une seule

$$\mathrm{N}+a+b = \mathrm{N}+(a+b) \tag{5}$$

dans laquelle a et b sont des quantités algébriques.

En effet si a et b sont positifs et égaux à $+$ A et $+$ B on a

$$\mathrm{N}+\mathrm{A}+\mathrm{B} = \mathrm{N}+(\mathrm{A}+\mathrm{B}),$$

c'est la formule (1). Si a est positif et b négatif, on peut les représenter par $+$ A et $-$ B et la formule (3) revient à

$$\mathrm{N}+\mathrm{A}-\mathrm{B} = \mathrm{N}+(\mathrm{A}-\mathrm{B})$$

ce qui est la formule (2), etc.

Généralisons. Supposons N assez grand pour que les opérations que nous allons indiquer soient possibles, et soient $c, d\ldots$ des quantités algébriques.

Aux deux membres de la formule

$$N + a + b = N + (a + b),$$

ajoutons c, nous aurons

$$\begin{aligned} N + a + b + c &= N + (a + b) + c \\ &= N + (a + b + c), \end{aligned}$$

aux deux membres ajoutons d, nous aurons

$$\begin{aligned} N + a + b + c + d &= N + (a + b + c) + d \\ &= N + (a + b + c + d); \end{aligned}$$

donc en général :

$$N + a + b + \ldots\ldots + l = N + (a + b + \ldots\ldots + l).$$

Généralisons encore, et appelons quantités algébriques égales, celles qui ont même signe et même valeur absolue.

Si l'on a

$$N + \alpha = N + \alpha',$$

on aura

$$\alpha = \alpha'.$$

En effet α et α' sont de même signe, car si l'on avait $\alpha = + a$, $\alpha' = - b$ on aurait

$$N + a = N - b$$

ce qui est absurde ; si l'on suppose α et α' positifs et égaux à a et à b on a

$$N + a = N + b, \qquad a = b, \qquad \alpha = \alpha, \text{ etc.}$$

Une somme algébrique $a + b + \ldots + l$ ne change pas de valeur quand on intervertit l'ordre des parties $a, b, \ldots\, l$.

En effet on a vu que

$$\begin{aligned} N + a + b &= N + (a + b), \\ N + b + a &= N + (b + a), \end{aligned}$$

et comme $a + b = b + a$, on a

$$N + a + b = N + b + a.$$

Il en résulte que

$$N+a+b+c=(N+a)+b+c=(N+a)+c+b$$
$$=N+a+c+b,$$

donc

$$N+a+b+c+d=(N+a+b)+c+d$$
$$=(N+a+b)+d+c=N+a+b+d+c,$$

et en général si N est assez grand

$$N+a+b\ldots\ldots+k+l=N+a+\ldots\ldots+l+k.$$

Un polynôme ne change donc pas de valeur quand on intervertit l'ordre de ses deux derniers termes.

En ajoutant successivement m, n.,. aux deux membres de la formule précédente, on a

$$N+a+b+\ldots+k+l+m+\ldots=N+a+\ldots+l+k+m\ldots$$

ce qui prouve que : un polynome ne change pas de valeur quand on intervertit l'ordre de deux termes consécutifs quelconques, pourvu que l'on ne touche pas au premier, et par suite *on peut placer les termes dans un ordre arbitraire, pourvu que le premier reste à sa place (et soit assez grand).*
Maintenant on a

$$N+a+b=N+(a+b),$$
$$N+a+b+c=N+(a+b)+c=N+(a+b+c),$$

et en général

$$N+a+b+\ldots\ldots+l=N+(a+b+\ldots\ldots+l). \qquad (1)$$

Or on a vu que l'on pouvait intervertir l'ordre des termes d'un polynôme, donc

$$N+a+b\ \ldots\ldots+l=N+l+b+\ldots\ldots+a, \qquad (2)$$

et

$$N+l+b+\ldots\ldots+a=N+(l+b\ \ldots\ldots+a), \qquad (3)$$

donc (1), (2) et (3) donnent

$$N+(a+b\ \ldots\ldots+l)=N+(l+b+\ldots\ldots+a),$$

et en vertu de la formule $\alpha = \alpha'$, qui résulte de $N + \alpha = N + \alpha'$, on a

$$a + b + \ldots\ldots + l = l + b \ldots\ldots + a,$$

Nous généraliserons encore en donnant le nom de *polynôme* à une somme algébrique quelconque, et nous pourrons dire que *la valeur d'un polynôme quelconque ne dépend pas de l'ordre de ses termes.*

Pour trouver la valeur d'un polynôme on peut grouper les termes arbitrairement, ainsi on a par exemple

$$a + b + c + d + \ldots\ldots + l = a + (b + c + d) + \ldots\ldots + (k + l),$$

en effet

$$\begin{aligned} a + b + c + d = b + c + d + a = (b + c + d) + a \\ = a + (b + c + d), \end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned} a + b + c \ldots\ldots + k + l = a + (b + c + d) \ldots\ldots + k + l \\ = a + (b + c + d) \ldots\ldots + (k + l), \text{ etc.} \end{aligned}$$

Il en résulte que pour trouver la valeur d'un polynôme, on peut, en appelant p_1, p_2... les termes positifs, n_1, n_2... ses termes négatifs, l'écrire ainsi

$$(p_1 + p_2 \ldots\ldots) + (n_1 + n_2 \ldots\ldots),$$

et l'on voit que *sa valeur s'obtient en ajoutant, d'une part les termes positifs, d'autre part les termes négatifs, puis en faisant la différence des sommes trouvées et en donnant au résultat le signe de la plus grande.*

Donc pour changer le signe d'un polynome, il suffira de changer les signes de tous ses termes.

Soustraire une quantité algébrique b d'une autre a, c'est trouver une quantité c telle que

$$a = b + c, \quad \text{alors on écrit} \quad c = a - b.$$

Pour faire la soustraction, il suffit de changer le signe de la quantité à soustraire et de l'ajouter à l'autre, ainsi par exemple :

$$A - (-B) = A + B$$

car

$$A + B - B = A.$$

La soustraction algébrique ne peut se faire que d'une seule manière, car si l'on avait

$$c = a - b, \quad c' = a - b$$

on aurait

$$a = b + c, \quad a = b + c'$$
$$b + c = b + c'$$

ce qui n'est possible, comme on l'a vu, que si $c = c'$.

Pour ajouter un polynôme, ou une somme algébrique à une quantité algébrique, il suffit de lui ajouter successivement les parties de la somme.

Car

$$a + (b + c + d) = (b + c + d) + a = b + c + d + a$$
$$= a + b + c + d.$$

Corollaire. — Pour retrancher une somme, il suffit de changer les signes de ses termes et de les ajouter successivement.

M. Méray, dans son remarquable opuscule sur les quantités dirigées, appelle somme de quantités algébriques la différence des valeurs absolues des sommes des termes positifs et négatifs, précédée du signe de la plus grande de ces sommes ; il en conclut qu'une somme, en vertu de cette définition, ne change pas de valeur quand on intervertit l'ordre de ses termes, mais il reste à prouver que

$$a + b + c + d = \big(((a + b) + c) + d\big)$$

ce qui résulte pour nous de notre définition du mot somme.

LES NOMBRES

On appelle *nombre* une locution et un signe qui la représente, destiné à désigner avec précision une quantité et toutes celles qui lui sont égales, de manière à les distinguer nettement de celles qui sont plus grandes ou plus petites.

Il reste à prouver que cette désignation est possible ([1]).

Si l'on choisit arbitrairement une quantité bien connue, parmi toutes les quantités de même espèce, et si on l'appelle *unité*, toutes les quantités égales à l'unité seront désignés ou, comme l'on dit, mesurées par le mot *un*.

On a donné des noms à toutes les quantités résultant de l'addition d'unités, on a ainsi créé les mots un, deux, trois... et des signes 1, 2, 3... qui sont les *nombres entiers*. Je n'ai pas à examiner ici les règles que l'on a suivies pour soulager la mémoire et retenir les noms des nombres entiers, il y en a un grand nombre, et on pourrait en imaginer beaucoup d'autres. Je retiens seulement cette définition :

Les *nombres entiers* sont ceux qui servent à désigner avec précision, ou comme l'on dit à *mesurer* les quantités obtenues en ajoutant des unités.

Bien que nous n'ayons pas encore montré comment on pouvait désigner les quantités ne résultant pas de l'addition d'unités, nous pouvons poser les définitions et remarques suivantes :

Mesurer une quantité c'est dire comment on peut la former avec l'unité et la distinguer de celles qui ne lui sont pas égales, au moyen d'un *nombre*. Deux nombres a, b sont *égaux*, quand ils représentent des quantités égales, et par suite cette égalité entre deux nombres est une identité.

Un nombre a est plus grand ou plus petit qu'un aûtre b, quand la quantité mesurée par a est plus grande ou plus petite que la quantité mesurée par b.

La somme des nombres a, b, c est le nombre qui mesure la somme des quantités mesurées par a, b, c... [2]

Les nombres sont d'après ces définitions de véritables *quantités* puisque leur égalité et leur addition est définie.

La soustraction des quantités ayant été définie, celle des nombres l'est.

---

[1] M. Tannery a reproché à notre définition, que le mot quantité n'était pas défini, j'espère que, s'il veut jeter un coup d'œil sur ce qui précède, il voudra bien reconnaître que le mot *quantité*, au contraire, est parfaitement défini.

[2] Les définitions que l'on donne dans les traités d'arithmétique n'ont pas de sens. Exemple : « *Ajouter plusieurs nombres, c'est les réunir en un seul qui les contienne tous ! !* », il faudrait dire comment on les réunit.

Je n'examine pas ici comment on procède pour effectuer réellement l'addition et la soustraction des nombres, il me suffit de concevoir la possibilité de ces opérations en ce qui concerne les nombres entiers. Il ne sera peut-être pas inutile de montrer que le prétendu axiome :

Une différence de deux quantités ne change pas quand à chacune d'elles on ajoute une même quantité

se démontre très facilement de la manière suivante.

Soit d la différence de a et b, en sorte que

$$a = b + d;$$

en ajoutant une même quantité q à a et à $b + d$ on a

$$a + q = b + q + d,$$

et, comme on obtient $a + q$ en ajoutant d à $b + q$, d est par définition la différence entre $a + q$ et $b + q$, comme elle l'est entre a et b.

Du reste cette proposition a été déjà implicitement démontrée, puisque nous avons prouvé que l'on pouvait grouper arbitrairement les termes d'une somme algébrique, ainsi

$$(a + q) - (b + q) = a + q - b - q = a + q - q - b = a - b.$$

Multiplication et division

Multiplier une quantité par un nombre entier, c'est ajouter autant de quantités égales à celle-là qu'il y a d'unités dans l'entier considéré.

La quantité que l'on ajoute ainsi à ses égales est le *multiplicande*, l'entier égal au nombre de parties ainsi ajoutées porte le nom de multiplicateur, et la somme obtenue est le *produit* du multiplicande par le multiplicateur, qui sont les *facteurs* du produit.

Le multiplicande peut d'ailleurs être un nombre.

On démontre dans tous les traités d'arithmétique, qu'un produit de plusieurs nombres (facteurs) ne change pas quand on intervertit l'ordre de ces nombres.

La multiplication est donc à un double point de vue une addition : 1° par définition ; 2° parce que c'est une opération indépendante de l'ordre dans lequel on combine les objets sur lesquels on opère. Si l'on se place au second point de vue, l'objet nul est le nombre *un*, car multiplier une quantité ou un nombre par *un*, c'est ne lui faire subir aucun changement.

Cette remarque a une très haute portée philosophique, et bien qu'elle ne soit pas faite, et pour cause, dans les traités d'arithmétique, elle donne la clef et la véritable origine des logarithmes. Je dis *et pour cause*, car ces traités ne donnant pas la véritable définition de l'addition, il était impossible d'en tirer une conclusion.

On apprend dans les traités d'arithmétique, à abréger l'opération que nous avons appelée multiplication ; mais ceci n'ayant rien d'essentiel pour le but que nous poursuivons, nous laisserons cette question de côté.

Diviser une quantité (qui le plus souvent est un nombre) appelée *dividende*, par un nombre appelé *diviseur*, c'est trouver deux nombres, l'un appelé *quotient*, qui indique combien on peut ajouter de quantités égales au diviseur pour former une somme au plus égale au dividende, et l'autre appelée *reste* qui indique ce qui reste.

Ceci sera plus clair en indiquant la manière d'opérer : soit D le dividende et d le diviseur on retranchera d de D. Si le reste est supérieur à d on en retranchera encore d, et ainsi de suite, jusqu'à ce que le reste R soit moindre que d ; R est alors le reste cherché et si l'on a effectué q soustractions, q sera le quotient, le dividende d est donc égal à ce que l'on en a retranché, c'est-à-dire $d \times q$ plus le reste.

Le lecteur connaît la définition des mots multiple, diviseur, etc., il sait faire une division ; mais peu importe, pour faire une division on peut suivre la méthode classique, on peut en suivre d'autres, cela m'est indifférent, je demande seulement qu'on m'accorde la possibilité de faire l'opération.

LES NOMBRES FRACTIONNAIRES

Supposons que l'on ait choisi une unité, et soit A une quantité à mesurer, c'est-à-dire que l'on éprouve le besoin de désigner avec précision, ainsi que celles qui lui sont égales, de manière à ne pas la confondre avec les autres.

Si A résulte de l'addition d'unités, nous savons comment on peut le mesurer au moyen d'un nombre entier ; mais s'il en est autrement voici comment on pourra procéder, sans affirmer pour le moment que l'on réussira.

On partagera l'unité en parties égales, c'est-à-dire que l'on considérera des quantités égales qui ajoutées donneront l'unité, ces parties sont dites *aliquotes*.

Commençons par partager l'unité en deux parties égales, s'il arrive que A se compose d'un certain nombre n de ces parties, on dira que A est mesuré par le nombre $\frac{n}{2}$,... S'il faut partager l'unité en m parties égales pour que A résulte de l'addition d'un certain nombre n de ces parties, on dira que A est mesuré par le nombre $\frac{n}{m}$. Ces nombres tels que $\frac{n}{m}$ sont des nombres fractionnaires (ou des fractions proprement dites s'ils sont moindres que un).

Ainsi on appelle *nombres fractionnaires*, ceux qui mesurent les quantités obtenues en ajoutant des parties aliquotes de l'unité ([1]).

Les propriétés des fractions résultant de cette définition, je n'ai pas à répéter ici ce qui est fort bien dit ailleurs, mais je dois encore définir la multiplication pour ne laisser aucun équivoque entre le lecteur et moi.

Multiplier une quantité par une fraction $\frac{m}{n}$, c'est prendre m fois la n^e partie de cette quantité ; en faisant cela le produit est formé avec le multiplicande, comme le multiplicateur est formé avec l'unité.

Remarque, au fond et en soi, parfaitement inutile ; mais qu'il faut signaler, parce que l'on a voulu faire de cette propriété la définition même de la multiplication, ce qui est absurde, et en effet on peut former le multiplicateur de bien des manières avec l'unité, et en formant le produit d'une quelconque de ces manières avec le multiplicande on n'obtient pas toujours le même résultat.

Je ne voudrais pas abandonner ce sujet, sans critiquer une nouvelle définition des nombres fractionnaires qu'on tend à imposer à la nouvelle génération.

---

[1] Je fais ici une hypothèse : *L'unité peut être partagée en parties égales*, s'il n'en est pas ainsi, notre théorie n'a pas sa raison d'être.

Il y a, comme je l'ai déjà fait observer ailleurs, deux espèces de définitions. Les unes ont pour but de fixer dans l'esprit une notion que nous possédons antérieurement, notion très claire, mais qui a besoin d'être précisée par une propriété fondamentale de l'objet défini, parce que cette propriété doit entrer comme élément dans un raisonnement.

La définition n'a alors rien d'arbitraire, et dans cette définition on doit immédiatement reconnaître l'objet défini. Si je définis le mot fraction ; comme nous savons tous ce que c'est qu'une fraction, il ne faut pas que j'en donne une définition bizarre, qui, bien que logiquement exacte, nous donne *a priori* une idée qui semble en contradiction avec la réalité.

Sans doute, logiquement on peut dire qu'une fraction est l'ensemble de deux entiers séparés par une barre [1], donner à l'ensemble de ces deux nombres certaines propriétés fondamentales qui en feront ce que nous savons être une fraction.

On peut encore considérer $\frac{a}{b}$ comme une sorte de symbole imaginaire, ne réprésentant qu'une impossibilité, mais pouvant entrer utilement dans les calculs.

Ces considérations, logiquement exactes, sont antiphilosophiques et ne peuvent que fausser l'esprit des malheureux auxquels on les enseigne.

Une remarque qui a son importance. — Nous avons déjà observé que la multiplication est une des formes de l'addition, donc à tout théorème relatif à l'addition correspond un théorème relatif à la multiplication, qu'il n'y a pas besoin de démontrer de nouveau. Exemple :

Une différence ne change pas quand on ajoute une même quantité à ses deux termes. Donc :

Un quotient ne change pas quand on multiplie le dividende et le diviseur par un même nombre.

Dans la théorie de la multiplication les nombres négatifs sont les nombres de la forme $\frac{1}{a}$.

---

[1] Quelques personnes, parmi lesquelles se trouvaient des dames dont la culture intellectuelle avait été très développée, et auxquelles je racontais que plusieurs professeurs définissaient de cette manière les nombres fractionnaires, non seulement ont refusé de me croire, mais même ont pensé que je voulais les mystifier.

Il y a en arithmétique comme en géométrie une loi de dualité.

LES INCOMMENSURABLES

Il me reste à montrer comment on peut mesurer les quantités que l'on ne peut pas obtenir en ajoutant des parties aliquotes de l'unité, et j'aurai pleinement justifié la définition que j'ai donnée du *nombre*.

Je vais avoir besoin de deux principes qui pour être compris n'ont pas besoin d'être démontrés, mais seulement expliqués.

Une quantité qui varie de manière à différer d'une quantité fixe, d'aussi peu que l'on veut, a cette quantité fixe pour limite. Ainsi on appellera *limite* d'une quantité variable V, une quantité fixe L telle que la valeur absolue de $V - L$ puisse être supposée moindre que toute quantitée donnée, si petite que l'on voudra. Suivant les cas V pourra ou ne pourra pas devenir rigoureusement égale à L.

Premier principe. — Si N est un nombre croissant de manière à dépasser tout nombre donné, $\frac{1}{N}$ aura zéro pour limite. Car $\frac{1}{N}$ décroît quand N croît et quand N est un entier suffisamment grand la N^e partie de l'unité devient aussi petite que l'on veut et moindre qu'une quantité donnée δ ; en effet en ajoutant δ un nombre de fois suffisamment grand à lui-même on finira par obtenir un nombre qui dépassera l'unité, en appelant N le nombre de fois on aura

$$N\delta > 1, \qquad \delta > \frac{1}{N}.$$

Deuxième principe. — Si une quantité variable V croît sans cesse en restant inférieure à une quantité fixe A elle a une limite au plus égale à A, qui est la plus petite des quantités qu'elle ne peut surpasser. De même quand une quantité V décroit sans cesse en restant supérieure à une quantité fixe A elle a une limite au moins égale à A.

Soit maintenant A une quantité qui ne puisse s'obtenir en ajoutant des parties aliquotes de l'unité. Partageons l'unité en m parties égales si c'est possible, A sera compris par exemple entre n fois et $n+1$ fois l'unité. Si m est assez grand, on aura une idée assez exacte de cette quantité A et de celles qui lui sont égales, en disant qu'elle est comprise entre deux quantités mesurées par les nombres $\frac{n}{m}$ et $\frac{n+1}{m}$; et si l'on appelle commensurables tous les nombres entiers ou fractionnaires, on donnera une idée exacte de la quantité A si l'on indique un moyen de calculer tous les nombres commensurables, mesurant les quantités plus grandes que A et les nombres commensurables mesurant les quantités plus petites que A. Et en effet si l'on fait cela, on apprendra que A est compris entre les n m^{mes} et les $n+1$, m^{mes} de l'unité, m étant aussi grand que l'on voudra, et si l'on pouvait ainsi définir une autre quantité B différente de A, la différence B — A serait par exemple supérieure à la μ^{me} partie de l'unité et B ne pourrait pas alors être compris entre les ν et les $\nu+1$ μ^{mes} parties de l'unité, si A était déjà compris entre ces limites.

Le nombre ainsi défini est dit incommensurable, et A est incommensurable avec l'unité.

En général deux quantités sont incommensurables, ou n'ont pas de commune mesure, quand l'une étant prise pour unité, l'autre est incommensurable avec celle-ci.

On peut dire qu'un nombre incommensurable est la limite commune aux nombres commensurables plus grands et plus petits que lui ; les premiers allant en décroissant et les seconds en croissant sans cesse.

CALCUL DES NOMBRES INCOMMENSURABLES.

L'addition et la soustraction ont été définies d'une manière générale, mais la multiplication et la division n'ont encore aucun sens quand il s'agit de nombres incommensurables.

On définira comme il suit le produit $a \times b$. Soient α et α' deux nombres commensurables et variables tels que

$$\alpha < a < \alpha',$$

le premier croissant, le second décroissant, et ayant pour limite commune a. Soient β et β' deux nombres choisis d'une manière analogue relativement à b.

Les produits $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$ iront, le premier en croissant, le second en décroissant ; un nombre $\alpha\beta$ restant constamment inférieur à un quelconque, bien déterminé, des nombres $\alpha'\beta'$; les nombres $\alpha\beta$ ont donc une limite, les nombres $\alpha'\beta'$ aussi, pour une raison analogue. Ces deux limites sont égales ; en effet, posant

$$\alpha' = \alpha + x, \qquad \beta' = \beta + y,$$

on a

$$\alpha'\beta' = \alpha\beta + \alpha y + \beta x + xy.$$

Or x et y diffèrent de zéro d'aussi peu que l'on veut, $\alpha'\beta'$ et $\alpha\beta$ diffèrent l'un de l'autre d'aussi peu que l'on voudra, et par suite de la limite de $\alpha\beta$, par exemple ; $\alpha\beta$, et $\alpha'\beta'$ ont donc la même limite.

Le quotient de $\frac{a}{b}$ pourra être défini comme un nombre q, tel que

$$a = bq\,;$$

il faut montrer que q existe, or il est facile de prouver en raisonnant comme tout à l'heure que $\frac{\alpha}{\beta'}$ et $\frac{\alpha'}{\beta}$ ont même limite q. Si l'on pose $\alpha = a - x$, $\beta = b + y$, $\frac{\alpha}{\beta'} = q - z$, on a

$$a - x = (b + y)\,(q - z)$$

et on voit que bq différera de a d'aussi peu que l'on voudra, donc, etc.

Il reste à montrer comment sachant approcher de a, b autant que l'on voudra, on pourra obtenir $a + b$, $a - b$, ab, $\frac{a}{b}$ avec telle approximation que l'on voudra. C'est là une question qui dépend de la théorie générale des erreurs et que j'ai traitée d'une manière entièrement rigoureuse, dans ma *Théorie des opérations financières*. (Encyclopédie des aide-mémoire Léauté.)

Etant donné un système quelconque de quantités, il peut arriver que, après avoir choisi une unité, et procédé comme nous venons de le faire, on ne parvienne à désigner avec précision qu'une partie seulement des quantités considérées. Ce système est alors ce que l'on appelle un système de quantités *complexes*, et pour les désigner toutes on est obligé de choisir une, quelquefois deux, trois... nouvelles unités ; en appelant i, j... ces unités, toute quantité pourra se représenter par un symbole tel que

$$ai + bj + \ldots$$

i, j... sont alors des unités complexes, mais je n'ai pas l'intention d'entrer ici dans les détails d'une théorie exposée ailleurs.

ENCORE LES QUANTITÉS ALGÉBRIQUES

On a pu remarquer comment, même avant l'introduction de l'idée de nombre, s'imposait la notion de quantité négative, pour simplifier le langage. Nous allons retrouver le besoin de faire usage des quantités algébriques en étudiant les opérations sur les polynômes. On a souvent besoin de multiplier une expression de la forme

$$\mathrm{N} \pm \mathrm{A} \pm \mathrm{B} \pm \ldots$$

par une autre de même forme, N, A,... désignant des nombres et l'opération indiquée étant arithmétiquement possible. Si l'on se place au point de vue didactique, il ne sera pas inutile de considérer deux cas particuliers très simples $(4 - 3)$ $(5 + 2)$, $(4 - 3)$ $(5 - 2)$ et de montrer comme il serait difficile d'arriver directement à une règle générale, sans faire usage du langage algébrique pour condenser le raisonnement, même en supposant les termes des polynômes que l'on considère entiers.

Sur ces exemples, on fera entrevoir la simplification introduite en faisant la convention suivante :

On appelle produit de deux quantités algébriques le produit de leurs valeurs absolues précédé du signe commun, si elles sont de mêmes signes, et du signe — si elles sont de signes contraires. Alors pour multiplier deux binômes dans le cas ou les valeurs absolues des termes sont entières, on voit qu'il suffit de multiplier chaque terme du premier algébriquement par chaque terme du second, et d'ajouter, algébriquement aussi, les produits obtenus.

Cet énoncé en condense un grand nombre d'autres, et il est alors naturel de se demander si l'on ne pourrait pas profiter des avantages que l'on a retirés des considérations algébriques pour simplifier l'énoncé des résultats, et appliquer ces considérations à la démonstration des théorèmes découverts, et même à leur généralisation.

En se plaçant sur le terrain algébrique, on observera que pour multiplier un polynôme quelconque positif

$$N + a + b + c + d,$$

où N est suffisamment grand, par un entier, 3, cela revient à former

$$N + a + b + c + d + N + a + b + c + d + N + a + b + c + d,$$

où $3N + 3a + 3b + 3c + 3d$... Pour le multiplier par une fraction $\frac{3}{4}$, il faudra en prendre les $\frac{3}{4}$, le quart est

$$\frac{N}{4} + \frac{a}{4} + \frac{b}{4} + \frac{c}{4} + \frac{d}{4},$$

car en multipliant ce nouveau polynôme par 4, on reproduit l'ancien, et les $\frac{3}{4}$ du polynôme seront

$$\frac{3}{4}N + \frac{3}{4}a + \frac{3}{4}b + \frac{3}{4}c + \frac{3}{4}d.$$

Si le multiplicateur est incommensurable, on le remplacera par un des nombres α commensurables plus petits que lui, puis par un des nombres commensurables plus grands et on passera aux limites. On verra ainsi que pour multiplier un polynôme représentant un nombre positif (arithmétique) par un nombre, il suffit de multiplier les termes du polynôme par ce nombre en conservant les signes, c'est-à-dire en observant la règle des signes.

Si l'on veut multiplier un polynôme négatif par un terme positif, on multipliera la valeur absolue du polynôme par le monôme et on changera le signe du résultat. Or il est facile de voir qu'en opérant ainsi cela revient à multiplier chaque terme du polynôme par le monôme, algébriquement, et à ajouter algébriquement les produits ainsi obtenus, etc.

La considération des quantités négatives s'impose donc, comme moyen d'abréger le langage et avant toute interprétation concrète ; et sans qu'il soit nécessaire de faire de nouvelles hypothèses ou de poser des axiomes très évidents.

LES LOGARITHMES

Les nombres sont de deux manières différents des quantités. On peut en effet définir leur addition de deux manières différentes : 1° à la manière ordinaire ; 2° en considérant leur multiplication comme une addition, car un produit jouit de la propriété

$$abc\ldots = bca\ldots = \ldots$$
$$abcd\ldots = ((ab)c)d\ldots;$$

l'objet nul est le nombre 1.

En se plaçant à ce second point de vue on peut représenter les nombres, les *mesurer* comme il suit :

On choisira l'un d'eux B pour unité, on lui donnera, pour éviter toute confusion, le nom de base et on le représentera par le symbole [1], alors 1 étant l'objet nul sera représenté par [0]. Les nombres entiers résultant de l'addition d'unités, à savoir B^2, B^3... seront représentés par [2], [3], ...

Si un nombre A ne résulte pas de l'addition d'unités (n'est pas de la forme B^n), on partagera [1] l'unité B en n parties égales à $\sqrt[n]{B}$ et l'on dira que A contient m de ces parties et est égal à $\sqrt[n]{B^m}$; il sera représenté par $\left[\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right]$

Il pourra arriver que A ne puisse pas se mettre sous la forme $\sqrt[n]{B^m}$, alors le nombre représentant A sera incommensurable (dans la nouvelle numération) et on le définira à la manière ordinaire.

[1] Il faudra d'ailleurs démontrer que les nombres considérés au second point de vue, peuvent être partagés en parties égales, où que $\sqrt[n]{B}$ existe.

Les nombres $[p]$ sont ce qu'on appelle les logarithmes des nombres p dans la base B et l'on a

$$[p]+[q]=[pq];$$

toute la théorie des logarithmes est contenue dans cette formule [2].

CONCLUSION

En précisant la notion de quantité et la notion de nombre, en donnant de bonnes définitions de ces mots, on assoit, on voudra bien le reconnaître, la théorie des nombres ou la mathématique pure, sur des bases absolument inébranlables. Et maintenant si l'on veut comparer notre manière de procéder avec celles de MM. Tannery, Méray, Cosserat, on voudra bien accorder que la nôtre :

1° Est toute aussi simple et certainement plus accessible aux jeunes intelligences qui ne sont pas familiarisées avec les subtilités de la métaphysique ;

2° Qu'en refusant de fonder la théorie des nombres sur la considération de la quantité, on n'en est pas moins obligé, pour arriver à faire une application quelconque, à refaire au moins l'équivalent de ce que nous avons commencé par faire au début ;

3° Que la mathématique étant la science qui a pour but l'étude des relations exactes et nécessaires de grandeur, de forme et de position des objets accessibles à nos sens, MM. Tannery, Méray et Cosserat ne font pas des mathématiques, mais de la métaphysique. C'est évidemment leur droit ; je leur accorde même qu'au point de vue purement esthétique, leurs méthodes ont certainement quelque chose de séduisant, mais elles sont beaucoup moins simples et moins naturelles que les nôtres et, sous une apparente rigueur, elles ne sont peut-être pas toujours à l'abri de quelques objections.

Si le lecteur pouvait m'adresser la parole, il me demanderait

---

(2) Si l'on veut changer de *base*, c'est-à-dire d'*unité*, il faudra multiplier les nombres $[n]$ par le nombre $\left[\frac{1}{B}\right]$.

sans doute, si chargé d'enseigner les mathématiques, mon cours serait conforme à l'exposé de mes doctrines.

A cela je répondrai que si j'enseignais l'arithmétique à de jeunes enfants qui n'ont jamais fait de mathématiques, je leur définirais la quantité et le nombre, le nombre entier et le nombre fractionnaire comme je l'ai fait, mais je postulerais la plupart des théorèmes que j'ai démontrés.

Que si j'avais, au contraire, à faire un cours d'algèbre, je croirais devoir me conformer entièrement à la façon dont je viens de présenter les choses.

Que si enfin j'avais à professer un cours d'arithmologie ou d'arithmétique supérieure, je croirais devoir me placer au point de vue de M. Tannery, car dans un pareil cours le nombre entier joue le rôle prépondérant, et tout gravite autour de lui.

LA PANGÉOMÉTRIE

ET L'EXAMEN DES PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA GÉOMÉTRIE

On donne le nom de pangéométrie à une branche de l'analyse pure, qui emprunte à la géométrie son langage figuré pour exprimer des idées et des faits qu'il serait trop long de traduire en langage ordinaire.

Dans ce qui va suivre, les mots tels que point, ligne, surface, déplacement, vont recevoir une signification tout autre qu'en géométrie, je prie le lecteur de vouloir bien faire table rase de toutes les notions qu'il a pu acquérir dans cette science, et de ne pas s'étonner des contradictions qui pourraient se présenter tout d'abord entre nos théories et ses préjugés.

Je dois aussi le prévenir que le sinus, le cosinus et la tangente d'un *nombre* seront pour nous, non pas les *lignes* dont on étudie les propriétés en trigonométrie, mais les fonctions définies par les séries convergentes

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots,$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

On démontre, *sans faire usage de considérations géométriques*, (voir mon *Traité d'Analyse*, t. I), que ces fonctions jouissent de toutes les propriétés dont jouissent les lignes qui portent le même nom en trigonométrie ; π est alors le nombre défini par la série

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots\right)$$

que l'on peut transformer de bien des manières.

LES ESPACES ET LEURS DIMENSIONS

Un ensemble de n quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sera ce que nous appellerons les coordonnées d'un *point* dans l'espace à n dimensions.

Si les coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ d'un point sont fonctions d'un seul paramètre t (qui pourra être l'une des variables $x_1, \ldots, x_n$) on dit que le point $x_1, x_2, \ldots, x_n$ décrit une *ligne* ou une *variété*, ou même un *espace* à une dimension.

Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont fonctions de deux variables indépendantes, t, u, on dit que le point $x_1, \ldots, x_n$ décrit une *variété* ou encore un espace à deux dimensions.

Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont fonctions de trois variables indépendantes, on dit que le point $x_1, x_2 \ldots x_n$ décrit une variété ou un espace à trois dimensions, etc.

Une variété à $n - 1$ dimensions est une *surface* ou une *hyper-surface*. Un espace à plus de trois dimensions est un *hyper-espace*.

Une variété à p dimensions est continue, quand les coordonnées d'un quelconque de ses points sont fonctions continues des p paramètres dont elles dépendent.

Une *figure* est un ensemble de variétés de mêmes dimensions ou de variétés de dimensions différentes (points, lignes, etc...).

On dit qu'une variété est le *lieu* des points dont les coordonnées satisfont à son équation, ou à ses équations. On dit aussi qu'une variété *contient* les points dont les coordonnées satisfont à ses équations. On dit enfin que des variétés se *coupent* ou se *rencontrent* quand elles contiennent un ou plusieurs points communs en nombre fini ou infini, formant une variété à o ou à un nombre quelconque de dimensions.

Si les coordonnées d'un point $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont fonctions linéaires d'un même paramètre variable t, qui peut être l'une des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on dit que ce point décrit une *droite*. Ainsi les équations

$$x_1 = a_1 + \alpha_1 t, \qquad x_2 = a_2 + \alpha_2 t, \quad \ldots\ldots \quad x_n = a_n + \alpha_n t.$$

représentent une *droite*. Ces équations peuvent se mettre sous la forme

$$\frac{x_1 - a_1}{\alpha_1} = \frac{x_2 - a_2}{\alpha_2} \dots = \frac{x_n - a_n}{\alpha_n}$$

ou même

$$\frac{x_1 - a_1}{k\alpha_1} = \dots = \frac{x_n - a_n}{k\alpha_n}.$$

Elles sont toujours satisfaites pour les mêmes valeurs de $x_1, \dots, x_n$ et représentent toujours la même droite, le même lieu. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont les *coefficients directeurs* de la droite.

Une équation du premier degré représente ce que l'on appelle un plan.

La théorie des équations linéaires peut se résumer comme il suit, en employant le langage de la pangéométrie : n équations linéaires entre n inconnues ont en général une solution et une seule.

n plans dans l'espace à n dimensions ont, en général, un et un seul point d'intersection.

Si cependant le déterminant Δ des coefficients des coordonnées est nul, sans autre condition, ces plans ne se coupent plus, à moins que l'un des déterminants obtenus en remplaçant, dans le précédent Δ, une ligne par les termes indépendants des coordonnées ne soit nul; les plans se coupent alors en une infinité de points située sur une droite (variété à une dimension) car les n équations de nos plans se réduisant à $n - 1$ distinctes, $n - 1$ des coordonnées deviennent fonctions de l'une d'elles.

Si tous les mineurs du déterminant Δ sont nuls, les plans peuvent n'avoir aucun point commun, ils peuvent aussi se couper suivant une variété à deux dimensions, etc.

Au fond, il ne faut voir dans ces propositions qu'une manière imagée de représenter des faits parfaitement réels; on appréciera seulement plus tard les avantages de la pangéométrie.

DÉPLACEMENTS EUCLIDIENS

Si l'on désigne par $x_1, x_2, \dots, x_n$ les coordonnées d'un point quelconque M d'une figure F, si l'on pose

$$x_1 = \varphi(y_1, y_2, \dots, y_n), \dots, x_n = \varphi_n(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

et si l'on suppose que l'on puisse résoudre ces équations par rapport aux y ; au point M $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de la figure F correspondra un point N de coordonnées $y_1, y_2, \ldots, y_n$ appartenant à une autre figure G; G est la *transformée* de F par la substitution (1)

Si la substitution (1) contient des paramètres variables, on pourra, en faisant varier ces paramètres d'une façon continue, transformer F en d'autres figures, en différant infiniment peu, si les paramètres varient infiniment peu ; il y a plus, pour certaines valeurs des paramètres, les figures F et G pourront être identiques, de sorte que la figure F se trouvera parmi les transformées.

Il peut même arriver qu'en effectuant sur la figure G la substitution

$$y_1 = \varphi_1 (z_1, z_2, \ldots, z_n), \qquad y_n = \varphi (z_1, z_2, \ldots, z_n),$$

on obtienne une des transformées de F, le cas est particulièrement intéressant et son étude approfondie a conduit à des résultats qui ont révolutionné l'analyse et la géométrie.

Parmi les substitutions dont nous venons de parler, les plus simples sont les substitutions orthogonales. Rappelons rapidement leurs propriétés : Une substition orthogonale est définie par les équations

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \ldots + a_{1n} y_n + b_1, \\ x_2 = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \ldots + a_{2n} y_n + b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \ldots + a_{nn} y_n + b_n ; \end{array} \right.$$

les b_n sont arbitraires, mais on a entre les a_{ij} les relations

$$(2) \qquad a_{1i} a_{1j} + a_{2i} a_{2j} \ldots + a_{ni} a_{nj} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \ si \ i \gtrless j \\ 1 \ si \ i = j \end{array} \right. .$$

On en conclut

$$\left(\sum \pm a_{12} a_{22} \ldots a_{nn} \right)^2 = 1$$

en sorte que

$$A = \sum \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$$

est égal à 1 ou à — 1. Lorsque $A = 1$, la figure qui a été transformée par la substitution orthogonale est dite avoir subi un *déplacement* euclidien.

Ce déplacement est une *translation* quand les a_{ij} sont nuls et les a_{ii} égaux à l'unité, et une *rotation* quand les b sont nuls.

Supposons $A = 1$ et posons

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} z_1 = a_{11} y_1 + \ldots + a_{1n} y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_n = a_{n1} y_1 + \ldots + a_{nn} y_n. \end{array} \right.$$

En vertu de (2) on aura

$$z_1^2 + z_2^2 + \ldots\ldots + z_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots\ldots + y_n^2 \qquad (4)$$

et

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} y_1 = a_{11} z_1 + a_{21} z_2 \ldots\ldots + a_{n1} z_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = a_{1n} z_1 + a_{2n} z_2 \ldots\ldots + a_{nn} z_n, \end{array} \right.$$

ce qui, en vertu de l'identité (4), exige que

$$a_{i1} a_{j1} + \ldots\ldots + a_{in} a_{jn} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } i \gtrless j, \\ 1 \text{ si } i = j. \end{array} \right.$$

On remarquera qu'il suffit pour que (3) et (5) soient orthogonales que

$$\sum z_i^2 = \sum y_i^2$$

Quand on connaît deux substitutions orthogonales

$$\ldots\ldots, x_i = a_{i1} y_1 + \ldots\ldots + a_{in} y_n, \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots, y_i = a'_{i1} z_1 + \ldots\ldots + a'_{in} z_n, \ldots\ldots$$

on en déduit une troisième en éliminant les y entre ces équations, ce qui donne par exemple

$$(6) \qquad \ldots\ldots, x_i = b_{i1} z_1 + \ldots\ldots + b_{in} z_n, \ldots\ldots$$

Cette dernière est bien orthogonale car on a

$$\sum x_i^2 = \sum y_i^2$$

$$\sum y_i^2 = \sum z_i^2$$

et par suite

$$\sum x_i^2 = \sum z_i^2$$

ce qui prouve, en vertu de la remarque que nous venons de faire, que la substitution (6) est orthogonale.

On peut former comme il suit une substitution orthogonale.

Soit $b_{ij} = -b_{ji}$ et $b_{ii} = 0$; posons

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 - y_1 = b_{11}(x_1 + y_1) + \ldots\ldots + b_{1n}(x_n + y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n - y_n = b_{n1}(x_1 + y_1) + \ldots\ldots + b_{nn}(x_n + y_n), \end{array} \right.$$

on a en multipliant la première équation par $x_1 + y_1, \ldots$, la dernière par $x_n + y_n$ et en ajoutant

$$\Sigma\left(x_i^2 - y_i^2\right) = \Sigma(b_{ij} + b_{ji})(x_i + y_i)(x_j + y_j) = 0,$$

donc $\Sigma_i^2 x = \Sigma y_i^2$, et par suite, si l'on résout le système (3) par rapport aux x ou aux y, on aura une substitution orthogonale générale.

Nous ferons au sujet des formules (3) quelques remarques :

On peut se donner $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_n$ et en déduire les b_{ij}, et bien que les équations soient à $\frac{n(n-1)}{2}$ inconnues, on doit avoir $\Sigma x^2 = \Sigma y^2$.

Si l'on se donne $n - 1$ points

$$\begin{array}{llll} x_{11}, & x_{12} & \ldots\ldots & x_{1n} \\ x_{21}, & x_{22} & \ldots\ldots & x_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

et les points obtenus en déplaçant ceux-ci par les formules (3)

$$\begin{array}{lll} y_{11}, & y_{12} \ldots\ldots & y_{1n} \\ y_{21}, & y_{22} \ldots\ldots & y_{2n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \end{array}$$

on se donnera trop de conditions pour déterminer les b_{ij}; voyons à quelles conditions les points donnés et leurs transformés devront satisfaire pour que les b_{ij} existent.

Il est clair que n systèmes obtenus en remplaçant dans (1) x_i et y_i par x_{ij} et y_{ij} devront être satisfaits.

Considérons d'abord les $n - 1$ équations

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{11} - y_{11} = b_{11}(x_{11} + y_{11}) + \ldots\ldots + b_{1n}(x_{1n} + y_{1n}), \\ x_{21} - y_{21} = b_{11}(x_{21} + y_{21}) + \ldots\ldots + b_{1n}(x_{2n} + y_{2n}), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array} \right.$$

b_{11} étant nul elles sont à $n - 1$ inconnues $b_{12}, \ldots, b_{1n}$ et elles admettront une solution. Il en sera de même des équations

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{12} - y_{12} = b_{21}(x_{11} + y_{11}) + \ldots\ldots + b_{2n}(x_{1n} + y_{1n}), \\ x_{22} - y_{22} = b_{21}(x_{21} + y_{21}) + \ldots\ldots + b_{2n}(x_{2n} + y_{2n}), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array} \right.$$

pourvu que l'on ne considère que les $n - 2$ premières, car $b_{21} = - b_{12}$ est déjà déterminé, et ainsi de suite. En résumé pour calculer les b, il suffira de se donner

$$\begin{array}{llll} x_{11}, & x_{12}, & x_{13} \ldots\ldots & x_{1n}, \\ & x_{22}, & x_{23} \ldots\ldots & x_{2n}, \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ & x_{n-1,\,h-1}, & & x_{n-1,\,n}, \end{array}$$

et les valeurs correspondantes des y. Dans ces conditions on aura

$$\sum_i x_{ij}^2 = \sum y_{ij}^2,$$

quel que soit l'indice j.

Les systèmes (4) (5)... ont une solution et on peut grouper leurs équations autrement.

Considérons donc d'abord les premières équations des systèmes (4), (5),... si l'on y adjoint

$$x_{1n} - y_{1n} = b_{1n}(x_{11} + y_{11}) + \ldots\ldots + b_{nn}(x_{1n} + y_{1n}),$$

il faudra y adjoindre la condition

$$(a) \qquad \sum x_{1i}^2 = \sum y_{1i}^2.$$

Considérons les secondes équations des systèmes (4), (5)..., on pourra y adjoindre les conditions

$$x_{2,n-1} - y_{2,n-1} = \ldots\ldots,$$
$$x_{2n} - y_{2n} = \ldots\ldots,$$

pourvu que l'on ait d'abord

$$(b) \qquad \sum x_{2i}^2 = \sum y_{2i}^2,$$

et

$$\sum (x_{1i} - x_{2i})^2 = \sum (y_{1i} - y_{2i})^2,$$

ce qui, en vertu de (a) et (b), peut s'écrire

$$\sum x_{1i}x_{2i} = \sum y_{1i}y_{2i},$$

et ainsi de suite.

De là résulte que à $n - 1$ points on peut faire correspondre $n - 1$ autres points donnés, pourvu que l'on ait

$$\sum x_{ij}^2 = \sum y_{ij}^2,$$
$$\sum x_{ij}x_{kj} = \sum y_{ij}y_{kj}.$$

Distances

On appelle *distance euclidienne*, ou simplement distance de deux points $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots y_n$, la quantité

$$+\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \ldots + (x_n - y_n)^2};$$

c'est un *invariant* de tout déplacement Euclidien, c'est-à-dire une quantité qui ne change pas quand on effectue sur la figure composée des deux points une substitution orthogonale de déterminant 1 (et même — 1).

En effet si l'on pose

$$x_1 = b_1 + a_{11} x_1' + \ldots\ldots,$$
$$x_2 = b_2 + a_{21} x_1' + \ldots\ldots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_1 = b_1 + a_{11} y_1' + \ldots\ldots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

on a

$$x_1 - y_1 = a_{11}(x_1' - y_1') + \ldots\ldots,$$
$$x_2 - y_2 = a_{21}(x_1' + y_1') + \ldots\ldots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

et si la substitution considérée est orthogonale, on a bien

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots\ldots = (x_1' - y_1')^2 + (x_2' - y_2')^2 + \ldots\ldots$$

c. q. f. d.

Figures égales

Deux figures sont égales, quand on peut transformer l'une dans l'autre au moyen d'un déplacement. Lorsque la transformation est faite, on dit qu'on les a fait coïncider.

Lorsque la distance de deux points A *et* B *est égale à la distance de deux autres points* A′ *et* B′, *les figures* AB *et* A′B′ *sont égales.*

En effet une translation fera coïncider les points A et A′, une autre translation les fera coïncider avec le point O de coordonnées 0, 0,..., 0, les points B et B′ coïncideront alors avec deux autres points C et C′ et comme les distances de O et C, de O et C′ sont égales, une infinité de rotations permettront de faire coïncider C et C′. Donc les figures AB et A′ B′ sont égales.

Si l'on appelle triangle la figure formée de trois points A, B, C, et si l'on appelle côtés les distances AB, BC, AC ; deux triangles ayant leurs côtés égaux deux à deux sont des figures égales, et en général dans l'espace à n dimensions deux figures formées chacune de $n+1$ points dont toutes les distances sont égales deux à deux sont des figures égales.

Étude de la ligne droite

Par un point donné on peut faire passer une infinité de droites.

En effet si $a_1, \ldots, a_n$ sont les coordonnées du point donné, les droites

$$(1) \qquad \frac{x_1 - a_1}{\alpha_1} = \frac{x_2 - a_2}{\alpha_2} = \ldots\ldots = \frac{x_n - a_n}{\alpha_n}$$

passeront par ce point et différeront entre elles par les paramètres $\alpha_1 : \alpha_2 : \ldots\ldots : \alpha^n$.

Par deux points donnés passe une droite et une seule.

Si l'on exprime en effet que la droite (1) contient encore le point $b_1, \ldots b_n$, on a pour déterminer $\alpha_1 : \alpha_2 \ldots$

$$\frac{b_1 - a_1}{\alpha_1} = \frac{b_2 - a_2}{\alpha_2} = \ldots\ldots$$

Les $\alpha_1 : \alpha_2 \ldots$ sont ainsi déterminés sans ambiguïté, et l'équation de la seule droite passant par $a_1, a_2 \ldots$ et $b_1, b_2 \ldots$ est

$$\frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \ldots\ldots = \frac{x_n - a_n}{b_n - a_n}.$$

Ainsi deux droites qui ont deux points communs coïncident.

Deux droites quelconques sont deux figures égales.

En effet, considérons deux droites, on peut faire subir à chacune d'elles une translation qui les fasse passer par le point dont toutes les coordonnées sont nulles. Soit

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \ldots\ldots, \qquad \frac{x_1}{b_1} = \frac{x_2}{b_2} = \ldots\ldots;$$

leurs équations, la première passe par le point A

$$\frac{a_1}{\sqrt{\Sigma a_i^2}}, \qquad \frac{a_2}{\sqrt{\Sigma a_i^2}}, \ldots\ldots,$$

la seconde par le point B

$$\frac{b_1}{\sqrt{\Sigma b_i^2}}, \qquad \frac{b_2}{\sqrt{\Sigma b_i^2}}, \ldots,$$

tous deux à la distance 1 de leur point commun, une rotation fera coïncider les points A et B, elles auront alors deux points communs et coïncideront donc, etc.

Sur toute droite passant en A, il existe deux points B et B′ situés à égales distances de A.

En effet soit

$$\frac{x_1 - a_1}{\alpha_1} = \frac{x_2 - a_2}{\alpha_2} = \ldots = t$$

une droite, les points $a_1 + \alpha_1 t$, $a_2 + \alpha_2 t, \ldots$; $a_1 - \alpha_1 t, a_2 - \alpha_2 t, \ldots$ sont tous deux à la distance

$$t\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots}$$

de A dont les coordonnées sont a_1, $a_2 \ldots$ et ce sont les seuls points de la droite située à cette distance de A, car la distance change avec t.

Soient $b_1, b_2, \ldots, b_n$ les coordonnées de B ; $b'_1, \ldots, b'_n$ celles de B′, les coefficients directeurs de la droite seront à volonté

$$\pm(a_1 - b_1), \pm(a_2 - b_2), \ldots \pm(a_n - b_n)$$

$$\text{ou} \quad \pm(a_1 - b'_1), \ldots \pm(a_n - b'_n).$$

Nous observerons que

$$\frac{\alpha_1}{\sqrt{\Sigma \alpha_i^2}}, \qquad \frac{\alpha_2}{\sqrt{\Sigma \alpha_i^2}}, \ldots, \frac{\alpha_n}{\sqrt{\Sigma \alpha_i^2}},$$

sont inférieurs à 1 en valeur absolue, ce qui permettra de les désigner respectivement par $\cos \varphi_1$, $\cos \varphi_2, \ldots, \cos \varphi_n$ et l'on aura

$$(1) \qquad \cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + \ldots + \cos^2 \varphi_n = 1$$

et les *nombres* φ seront bien déterminés si on les suppose compris entre 0 et π.

Les équations de la droite prennent alors la forme

$$x_1 = a_1 + t \cos \varphi_1, \ \ldots\ldots, \ x_n = a_n + t \cos \varphi_n,$$

et comme en vertu de (1)

$$\sum (x_i - a)^2 = t^2,$$

$\pm t$ est la distance du point $x_1, \ldots, x_n$ de la droite au point $a_1, \ldots, a_n$.

Les points de la droite peuvent être classés en deux catégories, les uns seront fournis par les valeurs positives de t, les autres par les valeurs négatives de t.

On obtient les points de la seconde catégorie en supposant t positif mais en remplaçant $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ par $\pi - \varphi_1$, $\pi - \varphi_2, \ldots$, (ou par $\pi + \varphi_1$, $\pi + \varphi_2, \ldots$). On dit que les premiers sont situés dans la direction positive de la droite et que les autres sont situés dans la direction opposée, et l'on peut évidemment prendre pour direction positive celle que l'on veut.

ANGLES

Considérons deux droites, mettons leurs équations sous les formes

(1) $$x_1 = a_1 + t \cos \varphi_1, \ \ldots\ldots, \ x_n = a_n + t \cos \varphi_n,$$
(2) $$y_1 = b_1 + u \cos \psi_1, \ \ldots\ldots, \ y_n = b_n + u \cos \psi_n;$$

leurs directions positives sont alors déterminées. Il est facile de voir que si l'on pose

$$\cos V = \cos \varphi_1 \cos \psi_1 + \cos \varphi_2 \cos \psi_2 + \ldots\ldots + \cos \varphi_n \cos \psi_n.$$

$\cos V$ sera compris entre $+1$ et -1, et que $\cos V$ restera le même quand on déplacera la figure formée par les deux droites. En effet

$$\cos V = \frac{(x_1 - a_1)(y_1 - b_1) + \ldots\ldots + (x_n - a_n)(y_n - b_n)}{ut}$$
$$= -\frac{\Sigma[(x_i - a_i - y_i + b_i)^2 - (x_i - a_i)^2 - (y_i - b_i)^2]}{2ut}$$

et

$$\sum (x_i - a_i - y_i + b_i)^2, \quad \sum (x_i - a_i)^2, \quad \sum (y_i - b_i)^2$$

ne changent pas quand on fait une substitution orthogonale, de plus cos V est inférieur à un, ou tout au plus égal à un, en valeur absolue.

On a en effet

$$\begin{aligned}(\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + \ldots\ldots) (\cos^2 \psi_1 + \cos^2 \psi_2 + \ldots\ldots) \\ - (\cos \varphi_1 \cos \psi_1 + \cos \varphi_2 \cos \psi_2 + \ldots\ldots)^2 \\ = \Sigma (\cos \varphi_i \cos \psi_j - \cos \varphi_j \cos \psi_i)^2 > 0\end{aligned}$$

ou

$$1 - \cos^2 V > 0,$$

le nombre V compris entre 0 et π qui a pour cosinus

$$\cos \varphi_1 \cos \psi_1 + \cos \varphi_2 \cos \psi_2 + \ldots\ldots + \cos \varphi_n \cos \psi_n,$$

est ce que l'on appelle l'angle des deux droites, ou de leurs directions positives.

Lorsque l'on donne les droites sous la forme

$$x_1 = a_1 + t\alpha, \ldots\ldots; \qquad x_1 = b_1 + u\beta_1, \ldots\ldots$$

ou

$$\frac{x_1 - a_1}{\alpha_1} = \ldots\ldots \qquad = \frac{x_n - a_n}{\alpha_n}, \quad \ldots\ldots$$

la direction positive n'est pas indiquée ; on a alors

$$\cos V = \pm \frac{\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \ldots\ldots}{\sqrt{\Sigma \alpha_i^2 \, \Sigma \beta_i^2}},$$

et l'angle est à volonté V ou $\pi - V$.

Lorsque $V = 0$ ou π, on dit que les deux droites sont *parallèles*, elles sont de même sens quand $V = 0$.

Lorsque $V = \frac{\pi}{2}$, on dit qu'elles sont dans des directions perpendiculaires, si de plus elles ont un point commun on dit qu'elles sont perpendiculaires l'une sur l'autre.

Par un point on peut toujours mener une et une seule parallèle à une droite donnée.

Soient $\cos \varphi_1$, $\cos \varphi_2, \ldots$ les cosinus directeurs de la droite donnée, a_1, $a_2, \ldots$ les coordonnées du point donné, $\cos \psi_1$, $\cos \psi_2, \ldots$ les cosinus directeurs de la droite cherchée, ses équations seront

$$x_1 = a_1 + t \cos \varphi_1, \qquad x_2 = a_2 + t \cos \psi_2, \ldots\ldots$$

et l'on devra avoir

$$\pm 1 = \cos \varphi_1 \cos \psi_1 + \cos \varphi_2 \cos \psi_2 + \ldots\ldots$$

ce qui donne

$$1 = (\cos \varphi_1 \cos \psi_1 + \cos \varphi_2 \cos \psi_2 + \ldots\ldots)^2,$$

ou

$$\sum \cos^2 \varphi_i \sum \cos^2 \psi_i - \left(\sum \cos \varphi_i \cos \psi_i\right)^2 = 0,$$

ou

$$\sum (\cos \varphi_i \cos \psi_j - \cos \varphi_j \cos \psi_i)^2 = 0$$

ce qui ne peut avoir lieu que si

$$\cos \varphi_i \cos \psi_j - \cos \varphi_j \cos \psi_i = 0,$$

ou

$$\frac{\cos \varphi_1}{\cos \psi_1} = \frac{\cos \varphi_1}{\cos \psi_2} = \ldots\ldots = \frac{\sqrt{\Sigma \cos \varphi_i^2}}{\sqrt{\Sigma \cos \psi_i}} = \pm 1.$$

La droite cherchée est donc bien déterminée, et a pour équations

$$x_1 = a_1 + t \cos \varphi_1, \qquad x_2 = a_2 + t \cos \varphi_2 \ldots\ldots$$

Par un point donné b_1, $b_2, \ldots$, b_n, mener une perpendiculaire sur la droite.

$$x_1 = a_1 + t \cos \varphi_1, \qquad x_2 = a_2 + t \cos \varphi_2, \ldots\ldots$$

Supposons d'abord le point b_1, $b_2, \ldots$, sur la droite donnée et en coïncidence avec a_1, $a_2, \ldots$, la droite cherchée aura pour équations

$$(1) \qquad x_1 = a_1 + u \cos \psi_1, \qquad x_2 = a_2 + u \cos \psi_2, \; \ldots\ldots$$

et l'on devra avoir

$$(2) \qquad \cos \varphi_1 \cos \psi_1 + \cos \varphi_2 \cos \psi_2 + \ldots\ldots = 0;$$

il en résulte qu'une infinité de droites répondent à la question car tous les ψ moins un sont arbitraires, si l'on élimine les ψ entre (1) et (2), on aura une équation satisfaite pour tous les points des perpendiculaires en question, ce sera leur lieu, ce lieu a pour équation

$$(x - a_1) \cos \varphi_1 + (x - a_2) \cos \varphi_2 + \ldots\ldots = 0,$$

et comme il est du premier degré c'est un plan. On dit qu'il est *perpendiculaire* à la droite (1). Donc *par un point d'une droite on peut mener un et un seul plan perpendiculaire à la droite.*

Supposons maintenant le point $b_1, b_2, \ldots$, hors de la droite donnée; par ce point menons le plan

$$(x_1 - b_1) \cos \varphi_1 + (x_2 - b_2) \cos \varphi_2 + \ldots\ldots + (x_n - b_n) \cos \varphi_n = 0.$$

Cherchons le point où il rencontre la droite, le t de ce point sera donné par la formule

$$\sum (a_i - b_i + t \cos \varphi_i) \cos \varphi_i = 0,$$

ou, comme

$$\sum \cos^2 \varphi_i = 1,$$

$$t = \sum (b_i - a_i) \cos \varphi_i.$$

Les coordonnées du point de rencontre seront

$$(3) \qquad a_1 + \cos \varphi_1 \sum (b_i - a_i) \cos \varphi_i, \ldots,$$

la droite passant par ce point et $b_1, b_2 \ldots$ aura pour équation

$$\frac{x_1 - b_1}{a_1 - b_1 + \cos\varphi_1 \Sigma(b_i - a_i)\cos\varphi_i} = \ldots;$$

elle sera perpendiculaire à la proposée, car on aura

$$\sum \cos\varphi_i [a_i - b_i + \cos\varphi_i \sum (b_j - a_j)\cos\varphi_j] = 0$$

en effet cette formule se réduit à

$$\sum (a_i - b_i)\cos\varphi_i - \sum (b_j - a_j)\cos\varphi_j = 0,$$

ce qui est une identité

La distance δ des points (3) et $b_1, b_2, \ldots$ que l'on appelle distance du point $b_1, b_2, \ldots$ à la droite donnée, est donnée par la formule

$$\delta^2 = \sum \Big[(a_i - b_i + \cos\varphi_i \sum (b_j - a_j)\cos\varphi_j) \Big]^2$$

$$= \sum [(a_i - b_i)\cos\varphi_j - (a_j - b_j)\cos\varphi_i]^2.$$

Cette distance δ est la plus petite distance du point $b_1, b_2, \ldots$ a un point $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de la droite. En effet si l'on veut rendre

$$(x_1 - b_1)^2 + (x_2 - b_2)^2 + \ldots = \Delta^2$$

minimum avec les conditions (1), il faudra rendre minimum

$$\sum (a_i - b_i + u\cos\varphi_i)^2 = \Delta^2$$

ou

$$\Delta^2 = u^2 + \sum 2u\cos\varphi_i (a_i - b_i) + \sum (a_i - b_i)^2$$

pour cela il faut prendre

$$u = \sum (b_i - a_i)\cos\varphi_i,$$

et l'on a

$$\Delta^2 = \sum (a_i - b_i)^2 - \left[\sum (a_i - b_i) \cos \varphi_i \right]^2 = \delta^2.$$

On peut mener par un point une perpendiculaire à un plan.
En effet soit

$$x_1 \cos \varphi_1 + x_2 \cos \varphi_2 + \ldots + x_n \cos \varphi_n + h = 0$$

l'équation d'un plan, où on peut supposer

$$\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + \ldots + \cos^2 \varphi_n = 1.$$

La droite qui a pour équations

$$\frac{x_1 - a_1}{\cos \varphi_1} = \frac{x_2 - a_2}{\cos \varphi_2} = \ldots = t$$

sera la droite demandée ; le point où elle rencontre le plan, ou *pied* de la perpendiculaire, sera donné par la formule

$$\cos \varphi_1 (a_1 + t \cos \varphi_1) + \cos \varphi_2 (a_2 + t \cos \varphi_2) + \ldots + h = 0,$$

ou

$$t = \frac{a_1 \cos \varphi_1 + \ldots + a_n \cos \varphi_n + h}{\Sigma \cos^2 \varphi_i} = a_1 \cos \varphi_1 + \ldots + a_n \cos \varphi_n + h ;$$

et t est la distance du point a_1, a_2... au pied, c'est ce que l'on appelle la distance du point au plan.

Si l'on cherche à rendre

$$\sum (a_j - x_j)^2 = \Delta^2$$

minimum, x_1, x_2,.. désignant les coordonnées d'un point du plan on trouve que les x doivent satisfaire aux relations

$$(a_i - x_i) + t \cos \varphi = 0,$$

et par suite que t est la plus courte distance du point a_1, a_2... au plan.

Considérons les plans

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \ldots \quad x_n = 0;$$

les distances du point $y_1, y_2, \ldots, y_n$ à ces plans seront précisément les coordonnés $y_1, \ldots, y_2$ de ce point. Les plans $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots$ portent le nom de *plans de coordonnées*, leur intersection est le point $0, 0, \ldots$ on lui donne le nom *d'origine* des coordonnées.

TRIGONOMÉTRIE

Considérons la figure formée par trois points, soient a, b, c les distances de ces points, $x_1, \ldots, x_n$; $y_1, \ldots, y_n$; $z_1, \ldots, z_n$ leurs coordonnées ; appelons A, B, C les angles que font respectivement les directions qui vont de $y_1 \ldots$ en $z_1 \ldots$; de $z_1 \ldots$ en $x_1 \ldots$ de $x_1 \ldots$ en $y_1 \ldots$ Les cosinus directeurs de ces directions sont

$$\frac{z_1 - y_1}{a}, \quad \frac{z_1 - y_2}{a}, \ldots$$
$$\frac{x_1 - z_1}{b}, \quad \frac{x_2 - z_2}{b}, \ldots$$
$$\frac{y_1 - x_1}{c}, \quad \frac{y_2 - x_2}{c}, \ldots$$

on en conclut

$$\operatorname{Cos} A = \frac{(x_1 - z_1)(y_1 - x_1) + (x_2 - z_2)(y_2 - x_2) \ldots}{bc}$$

ou

$$\operatorname{Cos} A = \frac{\Sigma[(x_i - z_i)^2 + (x_i - y_i)^2 - (y_i - z_i)^2]}{2bc},$$

ou enfin

$$\operatorname{Cos} A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

d'où l'on déduit

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos B,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

On sait que de ces formules on peut conclure

$$A + B + C = \pi, \qquad \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}, \text{ etc.}$$

en supposant A, B, C compris entre o et π. Toutes ces formules renferment implicitement les théorèmes du premier livre de géométrie et une grande partie de ceux du troisième, le cinquième livre résulte également de ce que nous venons de démontrer. Mais il est entendu qu'il s'agit ici, non de vérités géométriques mais de vérités s'énonçant dans un langage emprunté à la géométrie et ne s'appliquant pas, pour le moment, à des êtres concrets.

PERPENDICULAIRE COMMUNE A PLUSIEURS DROITES

Considérons les droites représentées par

$$x_1 = a_1 + t\cos\varphi_1, \;\ldots\ldots\; x_n = a_n + t\cos\varphi_n,$$
$$x_1 = b_1 + u\cos\psi_1, \;\ldots\ldots\; x_n = b_n + u\cos\psi_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

il existera une et une seule direction $\cos\lambda_1, \cos\lambda_2, \ldots, \cos\lambda_n$ perpendiculaire à $n - 1$ de ces droites ; mais il n'est pas possible de trouver une droite de direction $\cos\lambda_1, \cos\lambda_2 \ldots$ les rencontrant toutes si $n > 3$. Si $n = 3$ la droite perpendiculaire aux deux premières sera

$$x_1 = p_1 + \rho\cos\lambda_1, \qquad x_2 = p_2 + \rho\cos\lambda_2, \qquad x_3 = p_3 + \rho\cos\lambda_3$$

et si elle les rencontre on aura

$$a_1 + t\cos\varphi_1 = p_1 + \rho\cos\lambda_1, \ldots$$
$$b_1 + u\cos\psi_1 = p_1 + \rho\cos\lambda_1, \ldots$$

et par suite

$$\begin{vmatrix} a_1 - p_1, & \cos\varphi_1, & \cos\lambda_1 \\ a_2 - p_2, & \cos\varphi_2, & \cos\lambda_2 \\ a_3 - p_3, & \cos\varphi_3, & \cos\lambda_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} b_1 - p_1, & \cos\psi_1, & \cos\lambda_1 \\ b_2 - p_2, & \cos\psi_2, & \cos\lambda_2 \\ b_3 - p_3, & \cos\psi_3, & \cos\lambda_3 \end{vmatrix} = 0$$

ces équations entre les coordonnées p_1, p_2, p_3 d'un point quelconque de la perpendiculaire commune seront les équations de cette perpendiculaire.

SPHÈRES

On appelle sphère la surface qui a pour équation

$$\sum (x - a_i)^2 = R^2 \tag{1}$$

c'est le lieu des points à la distance R du point fixe $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ce point est le centre de la sphère. R est son rayon.

Toute équation de la forme

$$\sum x_i^2 + \sum A_i x_i + B = 0$$

peut se mettre sous la forme

$$\sum \left(x_i + \frac{A_i}{2}\right)^2 + B - \sum \frac{A_i^2}{4} = 0,$$

et par suite représente une sphère de centre

$$-\frac{A_i}{2}, \ldots, -\frac{A_n}{2}$$

et de rayon réel ou imaginaire $\sqrt{\sum \frac{A^2{}_i}{4} - B}$.

La sphère (1) dans l'espace à n dimensions est ce que l'on appelle une surface *fermée*. Il faut entendre par là que si l'on suppose

$$\sum (z_i - a_i)^2 < R^2 \tag{2}$$

et si l'on fait varier $z_1, z_2, \ldots, z_n$, on ne pourra jamais avoir

$$\sum (z_i + \Delta z_i - a_i)^2 > R^2 \tag{3}$$

en faisant varier les Δz d'une manière continue sans les faire passer par une valeur telle que

$$\sum \left(z_i + \Delta z_i - a_i^2\right) = \mathrm{R}^2.$$

Les points $z_1, z_2, \ldots, z_n$ pour lesquels la distance à $a_1, a_2, \ldots, a_n$ est inférieure à R sont dits intérieurs à la sphère, ceux pour lesquels $\Sigma\,(z_i - a_i)^2 > \mathrm{R}^2$ sont dits extérieurs.

Si l'on considère la variété plane à $n - 1$ dimensions

$$\begin{cases} \sum (x_i - a_i)^2 - \mathrm{R}^2 = 0, \\ \sum \mathrm{A}_i x_i + \mathrm{B} = 0, \end{cases}$$

en la déplaçant de manière à faire coïncider son plan avec le plan $x_n = 0$ il viendra

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} (x_i - b_i)^2 - \mathrm{R}'^2 = 0, \qquad x_n = 0$$

b_i et R′ désignant de nouvelles constantes, ce sera si l'on veut, une sphère dans l'espace à $n - 1$ dimensions ; à ce point de vue, la sphère n'est plus fermée et l'on peut toujours entrer dans une sphère ou en sortir sans la franchir, pourvu que l'on passe par un espace à une dimension d'ordre supérieur, c'est ainsi qu'en géométrie ordinaire on ne peut sortir de l'intérieur d'un cercle qu'en quittant son plan.

Plus généralement nos prisons seraient illusoires pour des êtres capables de se mouvoir dans un espace à quatre dimensions.

CONTACTS

Considérons deux variétés à p et q dimensions dans un espace à n dimensions. Supposons que ces variétés aient en commun le point $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et μ autres points dont nous désignerons les coordonnées par

$$\ldots x_i + \Delta x_i \ldots$$
$$\ldots x_i + 2\Delta x_i + \Delta^2 x_i \ldots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\ldots x_i + \mu\Delta x_i + \frac{\mu(\mu-1)}{1.\ 2}\Delta^2 x_i + \ldots + \Delta^\mu x_i$$

peu importe d'ailleurs qu'outre ces $\mu+1$ points communs, elles en aient encore d'autres. Supposons l'une au moins de ces variétés mobiles. Les x_i, les Δx_i ... les $\Delta_\mu x_i$ seront les mêmes pour ces variétés et, si les $\mu+1$ points considérés viennent se confondre, les deux variétés auront en un point $x_1, \ldots x_n$ les mêmes dx_i, les mêmes $d^2 x_i$ ... les mêmes $d^\mu x$, $(i = 1, 2, \ldots n)$.

Si nos deux variétés sont des lignes, on dira qu'elles ont un contact d'ordre μ et les dérivées des x_i seront les mêmes jusqu'à l'ordre μ inclusivement par rapport au paramètre t dont les coordonnées des deux lignes peuvent être considérées comme fonctions.

Si les variétés sont à p et q dimensions, supposons $p \leq q$ les coordonnées de la variété P à p dimensions seront fonctions de p paramètres $t_1, t_2, \ldots, t_p$. Les $\mu+1$ intersections considérées de P avec l'autre variété Q dépendront de $t_1, t_2, \ldots t_p$ et les $d^i x_i$, dépendront des $dt_1, dt_2 \ldots dt_p$; s'ils sont les mêmes pour P et pour Q, quels que soient $dt_1, dt_2 \ldots dt_p$, on dira que P et Q ont un contact d'ordre μ.

En particulier, si P et Q sont deux surfaces, les différentielles d'ordre $1, 2, \ldots \mu$ étant les mêmes pour P et Q si l'on considère les x_1 comme fonctions de $x_2, \ldots x_n$ on aura pour la condition d'un contact d'ordre μ

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_2} = \frac{\partial x_1'}{\partial x_2}, \ldots\ldots, \frac{\partial x_1}{\partial x_n} = \frac{\partial x_1'}{\partial x_n}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\ldots \frac{\partial^\mu x_1}{\partial x_2^\alpha \partial x_3^\beta \ldots} = \frac{\partial^\mu x_1'}{\partial x_2^\alpha \partial x_3^\beta \ldots} \ldots, \quad (x_1 = x_1')$$

x'_1, désignant la coordonnée x_1 de Q.

Si par exemple

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad \ldots\ldots, \quad x_n = \varphi_n(t)$$

représente une variété à une dimension, une ligne :

$$\frac{X_1 - x_1}{dx_1} = \frac{X_2 - x_2}{dx_2} = \ldots = \frac{X_n - x_n}{dx_n}$$

représentera, si X_1, X_2... sont les coordonnées courantes, une droite passant en $x_1, \ldots, x_n$ et ayant en ce point avec la ligne un contact du premier ordre, c'est la *tangente* à cette ligne en $x_1 \ldots x_2$.

Le plan

$$A_1(X_1 - x_1) + A_2(X_2 - x_2) + \ldots + A_n(X_n - x_n) = 0$$

aura avec la surface

$$x_1 = f(x_2, x_3 \ldots x_n)$$

un contact de premier ordre en $x_1, \ldots, x_n$, si

$$-\frac{A_2}{A_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial x_1}{\partial x_2}, \qquad -\frac{A_3}{A_1} = \frac{\partial x_1}{\partial x_3}, \ldots,$$

et son équation sera

$$X_1 - x_1 = (X_2 - x_2)\frac{\partial x_1}{\partial x_2} + \ldots + (X_n - x_n)\frac{\partial x_1}{\partial x_n},$$

c'est ce que l'on appelle le plan tangent en $x_1 \ldots, x_n$ à la surface.

Si l'équation de la surface se présente sous la forme

$$F(x_1, x_2 \ldots x_n) = 0,$$

la règle des fonctions implicites permet de mettre l'équation du plan tangent sous la forme

$$(X_1 - x_1)\frac{\partial F}{\partial x_1} + \ldots + (X_n - x_n)\frac{\partial F}{\partial x_n} = 0.$$

Le plan tangent en M est le lieu des droites qui ont avec la surface un contact du premier ordre en M.

En effet, soit

$$\frac{x_1 - x_1'}{a_1} = \ldots = \frac{x_n - x_n'}{a_n}$$

une droite passant par le point x'_1, $x'_2 \ldots x'_n$ de la surface

$$F(x_1, \ldots, x_n) = o,$$

on aura

$$F(x_1', \ldots, x_n') = o,$$

et

$$\frac{\partial F}{\partial x_1'}\, dx_1' + \frac{\partial F}{\partial x_2'}\, dx_2' + \ldots = o.$$

or les dx' pour la droite sont proportionnels aux a, en sorte que ses équations sont de la forme

$$\frac{x_1 - x_1'}{dx_1'} = \frac{x_1 - x_2'}{dx_2'} = \ldots;$$

Le lieu de ces droites, quand on fait varier les dx', est donc

$$(x_1 - x_1')\frac{\partial F}{\partial x_1'} + (x_2 - x_2')\frac{\partial F}{\partial x_2'} + \ldots = o,$$

ce qui démontre la proposition.

En général la variété du premier degré

$$(X_1 - x_1)\frac{\partial F}{\partial x_1} + (X_2 - x_2)\frac{\partial F}{\partial x_2} + \ldots = o,$$
$$(X_1 - x_1)\frac{\partial G}{\partial x_1} + (X_2 - x_2)\frac{\partial G}{\partial x_2} + \ldots = o,$$

touchera la variété

$$F = o, \qquad G = o, \ldots$$

VARIÉTÉS SINGULIÈRES

Le plan tangent à la surface

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = o$$

a pour équation

$$(X_1 - x_1)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + (X_n - x_n)\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

ou en posant

$$\frac{\partial x_n}{\partial x_1} = p_1, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}} = p_{n-1};$$

et, en appliquant la règle des fonctions implicites,

$$X_n - x_n = p_1(X_1 - x_1) + \dots + p_{n-1}(X_{n-1} - x_{n-1}),$$

ou encore

$$X_n = p_1 X_1 + \dots + p_{n-1} X_{n-1} + (x_n - p_1 x_1 - \dots - p_{n-1} x_{n-1});$$

le plan tangent renferme donc n paramètres

$$p_1, \dots, p_{n-1} \quad \text{et} \quad \theta = x_n - p_1 x_1 - \dots - p_{n-1} x_{n-1},$$

mais ces paramètres se réduisent à $n-1$ distincts car θ est fonction de $p_1, \dots, p_{n-1}$ comme nous allons le voir. On a en effet

$$d\theta = dx_n - p_1\,dx_1 - \dots - p_{n-1}\,dx_{n-1} - x_1\,dp_1 - \dots - x_{n-1}\,dp_{n-1}$$

mais

$$dx_n = p_1\,dx_1 + \dots + p_{n-1}\,dx_{n-1},$$

donc

$$d\theta = x_1\,dp_1 + \dots + x_n dp_n$$

et θ est fonction de p_1, $p_2 \dots p_n$.

Il résulte de là que l'on peut assujettir le plan tangent à une surface à $n-1$ conditions. On peut, par exemple, l'assujettir à passer par $n-1$ points donnés, on aura alors $n-1$ équations qui permettront de calculer les $n-1$ quantités x_1, $x_2 \dots x_{n-1}$ qui déterminent le point de contact. Supposons maintenant que l'on pose

$$F(p_1, p_2 \dots p_{n-1}) = 0. \tag{1}$$

Cette équation intégrée fournira une infinité de surfaces, car son intégrale dépend, non seulement de la forme de F, qui est arbitraire, mais en outre d'une seconde fonction arbitraire amenée par l'intégration.

Pour une pareille surface le plan tangent sera déterminé par $n-2$ conditions. Il pourra se faire que l'équation de la surface considérée satisfasse à plusieurs conditions analogues à (1), cela diminuera encore le nombre des conditions auxquelles on peut assujettir le plan tangent.

Dans l'espace à 3 dimensions les surfaces singulières dont nous venons de signaler l'existence portent le nom de surfaces développables. Nous leur conserverons ce nom dans l'hyperespace.

LES LONGUEURS, LES ANGLES

Nous appellerons longueur d'une courbe

$$x_1 = \varphi_1(t), \ldots, x_n = \varphi_n(t)$$

prise de $x_1^0 \ldots x_n^0$ en $x_1' \ldots x_n'$ l'intégrale

$$s = \int_{t^0}^{t'} \sqrt{dx_1^2 + \ldots + dx_n^2},$$

t^0 et t' désignant les valeurs de t pour lesquelles en général $x_i = x_i^0$ et $x_i = x_i'$, alors

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2$$

comme dx_1, dx_2,... sont proportionnels aux cosinus directeurs de la tangente en x_1,... x_n à la courbe, ces cosinus eux-mêmes seront $\frac{dx_1}{ds}$, $\frac{dx_2}{ds}$,...

Nous dirons que deux courbes

$$\ldots x_i = \varphi_i(t), \quad \text{et} \ldots x_i = \psi_i(u) \ldots$$

se coupent sous l'angle V en x_1.., x_n si leurs tangentes se coupent sous cet angle, c'est-à-dire si

$$\frac{d\varphi_1}{dt}\frac{d\psi_1}{du} + \ldots + \frac{d\varphi_n}{dt}\frac{d\psi_n}{du} = \cos V.$$

Si l'on a

$$x_1 = a_1 + t\cos\varphi_1,\ \ldots,\ x_n = a_n + t\cos\varphi_n$$

et $\Sigma \cos^2 \varphi = 1$ on aura

$$dx_1 = \cos\varphi_1\, dt,\ \ldots$$
$$dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots = dt^2 = ds^2$$

et t sera la longueur de la droite comprise entre a_1, a_2... et $x_1, \ldots x_n$. Ce qui est d'accord avec notre définition primitive de la longueur d'un segment.

PANGÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE

En voilà assez, je pense, pour montrer que la pangéométrie que nous venons d'exposer et que l'on peut appeler pangéométrie euclidienne, se confond, dans le cas des espaces à trois dimensions, avec la géométrie ordinaire, à cela près que les mots point, surface, etc..., n'y ont pas la même signification qu'en géométrie : ils ont un sens beaucoup plus général.

Nous allons maintenant étudier d'autres espaces.

Nous appellerons point l'ensemble de n nombres x_1, $x_2, \ldots,$ x_n, non plus arbitraires mais satisfaisant à la relation

$$(1) \qquad x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = R^2$$

ce qui revient à dire que nous ne considérons que des points situés sur une sphère (1).

Nous dirons qu'un point subit un *déplacement* dans le cas où ses coordonnées $x_1 \ldots x_n$ subissent une substitution orthogonale homogène

$$x_1' = a_{11}\, x_1 + \ldots + a_{1n} x_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n' = a_{n1}\, x_1 + \ldots + a_{nn} x_n,$$

substitution en vertu de laquelle il reste sur la sphère (1) car on a

$$\sum x'^2 = \sum x^2 = R^2;$$

deux figures seront égales quand on pourra transformer l'une dans l'autre au moyen d'un déplacement. (Acception nouvelle.)

Nous appellerons plans les seules surfaces représentées par des équations homogènes du premier degré. Les plans seront alors des figures égales, c'est-à-dire transformables les unes dans les autres par des substitutions orthogonales homogènes.

$n-2$ plans se couperont suivant une *droite*. Ainsi une droite sera une variété à une dimension représentée par n équations telles que

$$x_i = a_i u + b_i v \tag{2}$$

u et v désignant des paramètres variables, a_i, b_i des constantes et u et v ne seront pas arbitraires parce que l'on doit avoir $\Sigma\, x^2 = R^2$. Comme on peut toujours poser $u = \rho \cos \varphi$, $v = \rho \sin \varphi$, on pourra toujours remplacer les équations (2) par

$$x_i = \rho\,(a_i \cos\varphi + b_i \sin\varphi)$$

et si l'on fait $\varphi = 0$, on voit que $a_1\,\rho$, $a_2\,\rho$... sera un point de la droite; donc $\Sigma\, a^2 \rho^2$ doit être égal à R^2, pour la même raison on devra avoir $\Sigma\, b^2 \rho^2 = R^2$, alors comme $\Sigma\, x^2$ est aussi égal à R^2, on aura

$$\sum x^2 = R^2 = \sum a^2 \rho^2 \cos^2\varphi + \sum b^2 \rho^2 \sin^2\varphi + 2 \sum ba\varphi^2 \sin\varphi \cos\varphi$$

ou

$$R^2 = R^2 + 2 \sum ab\,\rho^2 \sin\varphi \cos\varphi$$

ce qui exige que $\Sigma\, ab = 0$.

Les équations de la droite seront de la forme

$$x_i = a_i \cos\varphi + b_i \sin\varphi$$

avec les conditions

$$\sum a^2 = R^2, \quad \sum b^2 = R^2, \quad \sum ab = 0.$$

La distance de deux points $x_1 \ldots x_n$ et $y_1 \ldots y_n$ ne sera plus la quantité $\sqrt{\Sigma(y-x)^2}$, mais l'invariant plus simple δ donné par

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = \mathrm{R} \cos \delta ;$$

la longueur ds d'un arc de courbe infiniment petit sera donné par définition pour la formule

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2.$$

TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE

Reprenons les équations de la droite

$$(1) \qquad x_i = a_i \cos \varphi + b_i \sin \varphi \ldots$$

on en tire

$$dx_i = (-a_i \sin \varphi + b_i \cos \varphi)\, d\varphi$$

et par suite en appelant ds l'élément d'arc de droite

$$ds^2 = \mathrm{R}^2 d\varphi^2 ;$$

(en tenant compte des relations $\Sigma\, a^2 = \Sigma\, b^2 = \mathrm{R}^2$, $\Sigma\, ab = 0$) alors $\varphi = \frac{s - s^0}{\mathrm{R}}$ ou simplement $\varphi = \frac{s}{\mathrm{R}}$, si l'on compte les arcs à partir du point $a_1, \ldots, a_n$; donc les équations (1) s'écrivent

$$x_i = a_i \cos \frac{s}{\mathrm{R}} + b_i \sin \frac{s}{\mathrm{R}},$$

si l'on exprime que la droite passe par le point $c_1, c_2, \ldots, c_n$ on aura

$$c_i = a_i \cos \frac{s'}{\mathrm{R}} + b_i \frac{\sin s'}{\mathrm{R}}.$$

l'élimination de a_l donne

$$x_i = \frac{a_i \sin \frac{s' - s}{\mathrm{R}} + b_i \sin \frac{s}{\mathrm{R}}}{\sin \frac{s'}{\mathrm{R}}}.$$

Considérons maintenant un triangle ABC, soient $x_1, \ldots, x_n$ les coordonnées du sommet A; $y_1, \ldots, y_n$ celles de B; $z_1, \ldots, z_n$ celles de C, les équations de AB et AC seront :

$$(2) \qquad X_i = \frac{x_i \sin \frac{c-s}{R} + y_i \sin \frac{s}{R}}{\sin \frac{c}{R}},$$

$$(3) \qquad X_i = \frac{x_i \sin \frac{b-s}{R} + z_i \sin \frac{s}{R}}{\sin \frac{b}{R}}.$$

$X_1, \ldots$ sont alors les coordonnées courantes et a, b, c les longueurs de BC, CA, AB. Calculons l'angle A des côtés AB, AC, il est donné par la formule

$$\text{Cos A} = \sum \frac{\partial X}{\partial s} \frac{\partial X}{\partial s}$$

$\frac{\partial X_i}{\partial s}$ désignant la dérivée de X_i tiré de (2) pour $s = 0$ et $\frac{\partial X_i}{\partial s}$ la même dérivée tirée de (3). On aura ainsi

$$\text{Cos A} = \sum \frac{\left(x_i \cos \frac{c}{R} - y_i\right)\left(x_i \cos \frac{b}{R} - z_i\right)}{\sin \frac{c}{R} \sin \frac{b}{R}} \frac{1}{R^2},$$

ou

$$R^2 \cos A \sin \frac{b}{R} \sin \frac{c}{R} = \sum x_i^2 \cos \frac{c}{R} \cos \frac{b}{R} - \sum x_i y_i \cos \frac{b}{R} - \sum x_i z_i \cos \frac{c}{R} + \sum y_i z_i.$$

ou

$$R^2 \cos A \sin \frac{b}{R} \sin \frac{c}{R} = R^2 \cos \frac{b}{R} \cos \frac{c}{R} - R^2 \cos \frac{c}{R} \cos \frac{b}{R} - R^2 \cos \frac{b}{R} \cos \frac{c}{R} + R^2 \cos \frac{a}{R}$$

ou finalement

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R} + \sin\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R}\cos A\,;$$

c'est la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique d'où l'on déduit toutes les autres.

Pangéométrie hyperbolique

En pangéométrie hyperbolique, on appelle point l'ensemble de n nombres $x_1 \ldots x_n$ liés entre eux pour la relation

$$(1) \qquad x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_{n-1}^2 - x_n^2 = R^2$$

qui est l'équation euclidienne d'un *hyperboloïde*. Nous ferons usage de la notation $\Sigma' a_i$ en général pour désigner une somme de termes dont le dernier sera pris avec le signe — en sorte que (1) s'écrira $\Sigma' x_i^2 = R^2$ ou même $\Sigma' x = R^2$.

Nous dirons qu'un point subit un déplacement quand ses coordonnées $x_1 \ldots x_n$ subiront une substitution linéaire de la forme

$$\begin{gathered} x'_1 = a_{11} x_1 + \ldots\ldots + a_{1n} x_n, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x'_n = a_{n1} x_1 + \ldots\ldots + a_{nn} x_n, \end{gathered}$$

non plus orthogonale mais telle que

$$\sum_i{}' a_{pi} a_{qi} = \begin{cases} 0 \text{ si } p \lesseqgtr q \\ 1 \text{ si } p = q \end{cases}$$

alors on a aussi

$$\sum_i{}' a_{pi} a_{iq} = \begin{cases} 0 \text{ si } p \lesseqgtr q \\ 1 \text{ si } p = q \end{cases}$$

comme il est facile de le vérifier.

Les plans seront les surfaces représentées par des équations homogènes du premier degré, et les droites seront des variétés à une dimension situées sur des plans.

Nous pourrons mettre les équations d'une droite sous la forme

$$x_i = \rho\,(a_i \cos h\varphi + b_i \sin h\varphi)$$

ρ et φ désignant des paramètres variables, a_i, b_i des constantes. En faisant $\varphi = 0$, on voit que le point ρa_i appartient à la droite, alors $\Sigma' a^2 \rho^2$ doit être égal à R^2, et comme $\Sigma' x^2$ doit être égal à R on voit que $\Sigma' b^2 \rho^2 = R^2$ et que $\Sigma' ab = 0$, en sorte que les équations de la droite seront

$$x_i = a_i \cos h\varphi + b_i \sin h\varphi$$

avec les conditions

$$\sum{}' a_i^2 = R^2, \qquad -\sum{}' b_i^2 = R^2, \qquad \sum{}' a_i b_i = 0.$$

La distance δ de deux points sera définie par la formule

$$\cos h\delta = \sum{}' xy,$$

$x_1 \ldots x_n$ et $y_1 \ldots y_n$ désignant les coordonnées de ces points, enfin la longueur d'un arc ds infiniment petit sera défini par la formule

$$-\,ds^2 = \sum{}' dx^2\,;$$

δ et ds sont des invariants de la substitution que nous avons appelée un déplacement.

Trigonométrie hyperbolique

Reprenons les équations de la droite

$$x_i = a_i \cos h\varphi + b_t \sin h\varphi \tag{1}$$

on en tire

$$dx_i = (a_i \sin h\varphi + b_i \cos h\varphi)\, d\varphi$$

et par suite en appelant ds l'élément de droite

$$ds = R d\varphi\,;$$

on pourra donc prendre au lieu de (1)

$$x_i = a_i \cos h \frac{s}{R} + b_i \sin h \frac{s}{R},$$

s sera alors l'arc compté à partir du point $a_1 \ldots a_n$.

Si l'on assujettit la droite à passer par le point $c_1 \ldots c_n$, on aura, comme il est facile de voir

$$x_i = \frac{a_i \sin h \dfrac{s' - s}{R} + c_i \sin \dfrac{s}{R}}{\sin \dfrac{s'}{R}},$$

s' désignant la longueur de l'arc qui joint les points $a_1 \ldots$ et $c_1 \ldots$

Considérons maintenant le triangle ABC, soient $x_1, \ldots x_n$; $y_1 \ldots y_n$; $z_1 \ldots z_n$ les coordonnées de A, B, C. Les équations des côtés AB et AC seront en appelant c et b leurs longueurs :

$$X_i = \frac{x_i \sin h \dfrac{c - s}{R} + y_i \sin h \dfrac{s}{R}}{\sin h \dfrac{c}{R}},$$

$$X_i = \frac{x_i \sin \dfrac{b - s}{R} + z_i \sin h \dfrac{s}{R}}{\sin h \dfrac{b}{R}}.$$

Enfin si l'on appelle angle de deux éléments $dx_1 \ldots dx_n$ et $dx'_1 \ldots dx'_n$ la quantité dont le cosinus est

$$\sum' \frac{dx}{ds} \frac{dx'}{ds'},$$

l'angle A de notre triangle sera donné par la formule

$$\text{(2)} \qquad \cos ha = \cos hb \cos hc - \sin hb \sin hc \operatorname{Cos}_n A$$

que l'on déduirait de la formule relative à un triangle sphérique en remplaçant a, b, c par $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, $c\sqrt{-1}$.

Je ne développe pas les calculs, identiques à ceux qui ont été faits plus haut à propos de l'espace sphérique. Nous déduirons donc de (2) des formules analogues à celles de la trigonométrie sphérique en remplaçant dans celles-ci a, b, c par $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, $c\sqrt{-1}$.

La géométrie euclidienne

Tout ce que nous venons de faire jusqu'à présent est absolument rigoureux, c'est de l'analyse pure, mais c'est une analyse qui ressemble singulièrement à de la géométrie ; il y a plus, si nous supposons l'espace euclidien à trois dimensions, nous avons été assez loin pour prouver qu'il n'existe pas une seule proposition de géométrie que nous ne puissions déduire de notre analyse, à cela près que les mots point, ligne, surface, etc., y ont une autre signification qu'en géométrie, et à cela près aussi que les prétendus axiomes ou postulats de la géométrie ont été rigoureusement démontrés.

Est-il possible d'identifier la géométrie ordinaire avec les résultats de notre analyse ? résoudre la question par l'affirmative, ce serait du coup faire disparaître tous les nuages qui planent sur les commencements de la géométrie, et ce ne serait pas acheter trop cher une méthode à laquelle on pourrait seulement reprocher les considérations d'un ordre trop élevé sur lesquelles elle s'appuie.

Malheureusement, il faut y renoncer, et notre analyse va seulement servir à nous montrer combien il y a d'erreurs dans les meilleurs traités de géométrie.

Si nous voulons identifier la géométrie ordinaire avec la pangéométrie euclidienne à trois dimensions, nous pourrons le faire en admettant que tout point de l'espace réel peut être déterminé par trois nombres ou coordonnées et qu'à trois coordonnées correspondent un point et un seul.

Ces trois coordonnées pourront être les distances du point à ce que l'on appelle trois plans rectangulaires.

Mais qu'est-ce que c'est au juste qu'un plan ?

Les définitions que l'on en donne dépendent de la notion que l'on se fait des figures capables de coïncider avec d'autres quand on les déplace sans changer leur forme (sans parler d'hypothèses que contient la définition de la droite qui sert à définir le plan), or cette notion de la fixité de la forme est vague ; comme celle de la distance, elle dépend de nos sensations qui sont très grossières. Puisque nous ne pouvons pas dire exactement ce que c'est qu'un plan, renonçons à faire de la géométrie une science rationnelle et présentons les choses ainsi :

L'expérience nous apprend qu'il existe des surfaces bien dressées que l'on peut obtenir en usant deux corps solides par le frottement l'un contre l'autre, ces surfaces s'appliquent en tout sens l'une sur l'autre, ce sont des plans.

Sur les plans il existe des lignes telles que le bord d'une règle, lignes qui semblent coïncider dès qu'on leur donne deux points communs ; les plans et les droites convenablement associés donnent lieu à des figures plus ou moins grossières dont on constate expérimentalement certaines propriétés remarquables et dont on peut deviner d'autres propriétés, conséquences les unes des autres.

Cette première étude faite, étude dont il ne faut pas dissimuler le caractère purement expérimental et approché, on peut se demander si, à l'aide de certaines hypothèses, on ne pourrait pas relier les faits observés les uns aux autres, et c'est alors qu'intervient la pangéométrie pour répondre à la question, mais en laissant planer le vague sur la nature des choses sur lesquelles spécule la géométrie. Nous ne savons pas, nous ne saurons jamais au juste ce qu'est un déplacement sans changement de forme : une foule de choses différentes répondent à l'idée que nous nous faisons du plan et de la ligne droite, et cela est si vrai qu'en supposant que la géométrie vulgaire soit absolument vraie, si le monde venait à changer de forme en se transformant par rayons vecteurs réciproques, nous ne nous en apercevrions pas, si les corps, en se déplaçant, restaient identiques à leurs images.

Si maintenant, au lieu de considérer les déplacements comme des substitutions orthogonales générales, nous les considérons comme des substitutions homogènes, la géométrie à trois dimensions devient la géométrie *riemannienne*, la géométrie plane devient identique à la géométrie des figures tracées sur la sphère, les théorèmes de géométrie plane, qui ne dépendent pas du postulatum d'Euclide restent vrais, mais il n'existe plus de droites parallèles, et la somme des angles d'un triangle est supérieure à π.

Si l'on admet qu'un déplacement est une substitution du genre de celles que nous avons considérés en pangéométrie hyperbolique, les théorèmes indépendants du postulatum d'Euclide sont encore vrais, mais entre les angles A,B,C et les côtés a, b, c d'un triangle, on a la relation

$$\cos A = \cos B \cos C + \sin B \sin C \cos h \frac{a}{R}$$

et si l'on fait $B = \frac{\pi}{2}$ on a

$$\cos A = \sin C \cos h \frac{a}{R}$$

en sorte que A n'est réel que si

$$\sin C \cos h \frac{a}{R} \leqq 1,$$

l'angle C doit donc être inférieur à $\frac{\pi}{2}$. Il existe donc dans le le plan une infinité de droites obliques sur une autre, et qui ne rencontrent pas une perpendiculaire donnée. Si l'on pose

$$\sin C = \frac{1}{\cos h \frac{a}{R}}$$

le plus petit angle 2p donné par la formule

$$\cos p = \frac{1}{\cos h \frac{a}{R}}$$

est *l'angle de parallélisme*, fonction comme l'on voit de R et de a. La pangéométrie hyperbolique à trois dimensions coïncide alors avec la géométrie de Lobatchefsky et de Bolyai.

Le postulatum d'Euclide est-il démontrable ? évidemment non, pas plus que cet autre postulatam : par deux points on ne peut faire passer qu'une droite, et en effet les pangéométries sphériques et hyperboliques sont aussi vraies l'une que l'autre, et pourraient aussi bien l'une que l'autre rendre compte des faits que nous observons, et si nous supposons R suffisamment grand, elles ne différeront pas beaucoup de la pangéométrie euclidienne.

SUR LA RÉALITÉ DE L'HYPERESPACE

On peut concevoir des êtres intelligents réduits à de simples surfaces, des ombres, si l'on veut, assujettis à se mouvoir sur une surface donnée, si ces êtres ont des sens organisés de telle sorte qu'ils ne puissent avoir conscience de ce qui existe en dehors de la surface sur laquelle ils sont assujettis à demeurer, ils feront de la géométrie à deux dimensions, pour eux notre géométrie sera de la pangéométrie.

Dès lors, il se pose cette question : doit-il exister un hyperespace à plus de trois dimensions, dont notre monde tangible et visible ne serait qu'une variété à trois dimensions ? Il est bien difficile, dans l'état actuel de la science, d'y répondre. Si quelques phénomènes physiques pouvaient s'expliquer avec cette hypothèse, on pourrait peut-être placer dans l'hyperespace les âmes et Dieu, et expliquer la mort par la séparation de l'âme et du corps, l'âme étant censée toucher le corps dans l'état de vie, et cessant de le toucher après la mort, et de lui communiquer alors le mouvement.

RÉSUMÉ

Si l'on fait de la pangéométrie à trois dimensions, les coordonnées x, y, z d'un point sont les distances de ce point aux trois plans de coordonnées.

Si nous appelons surfaces réelles ce qui sert de limite aux corps naturels. Nous pouvons alors considérer trois séries de surfaces réelles se déplaçant dans l'espace (avec ou sans changement de forme, ces mots n'ont d'ailleurs aucun sens), on pourra numéroter chaque surface de chaque système de telle sorte que ces numéros varient d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$ (et cela d'une infinité de manières), deux numéros étant affectés à des surfaces nécessairement différentes.

Si nous admettons que par un point de l'espace passent trois de nos surfaces réelles, nous pouvons appeler coordonnées de ce point les numéros des surfaces qui s'y rencontrent.

Trois de ces surfaces réelles, celles qui portent les numéros zéro, seront, si l'on veut, les trois plans de coordonnées d'une pangéométrie à trois dimensions.

Le plan est donc une surface arbitraire, ou pour parler plus exactement, on peut faire toute la géométrie, telle qu'elle est enseignéedans nos livres classiques, non seulement sans définir le plan, mais en appelant plan une surface arbitraire.

1° Il est donc impossible de donner une définition précise du plan.

2° Il faut se résigner à faire de la géométrie une science physique et expérimentale.

Il faut se résigner à regarder la géométrie comme un langage propre à coordonner des faits, ou plutôt des *apparences*, et à ce point de vue elle peut à volonté être ou ne pas être euclidienne. Si l'on a choisi pour l'enseignement la géométrie euclidienne, c'est qu'elle a paru plus simple eu égard à la conformation du cerveau de nos ancêtres. Il n'y aurait rien d'étonnant, s'il existe des êtres intelligents dans la planète Mars, à ce que leur géométrie ne fût point euclidienne, en un mot à ce qu'ils aient une autre idée que nous du *déplacement sans changement de forme*.

ÉVREUX, IMPRIMERIE DE CHARLES HÉRISSEY

SCIENTIA

Exposé et Développement des questions scientifiques à l'ordre du jour

RECUEIL PUBLIÉ SOUS LA DIRECTION DE

MM. APPELL, D'ARSONVAL, HALLER, LIPPMANN, MOISSAN, POINCARÉ, POTIER, Membres de l'Institut,

Pour la Partie Physico-Mathématique

ET DE

MM. D'ARSONVAL, FOUQUÉ, GAUDRY, GUIGNARD, MAREY, Membres de l'Institut; HENNEGUY, Professeur au Collège de France,

Pour la Partie Biologique

Chaque fascicule comprend de 80 à 100 pages in-8° écu, avec cartonnage spécial.

Prix du fascicule.................... **2** francs

On peut souscrire à une série de 6 fascicules (*Série Physico-Mathématique* ou *Série Biologique*) au prix de **10** francs.

A côté des revues périodiques spéciales, enregistrant au jour le jour le progrès de la Science, il nous a semblé qu'il y avait place pour une nouvelle forme de publication, destinée à mettre en évidence, par un exposé philosophique et documenté des découvertes récentes, les idées générales directrices et les variations de l'évolution scientifique.

A l'heure actuelle, il n'est plus possible au savant de se spécialiser; il lui faut connaître l'extension graduellement croissante des domaines voisins : mathématiciens et physiciens, chimistes et biologistes ont des intérêts de plus en plus liés.

C'est pour répondre à cette nécessité que, dans une série de monographies, nous nous proposons de mettre au point les questions particulières, nous efforçant de montrer le rôle actuel et futur de telle ou telle acquisition, l'équilibre qu'elle détruit ou établit, la déviation qu'elle imprime, les horizons qu'elle ouvre, la somme de progrès qu'elle représente.

Mais il importe de traiter les questions, non d'une façon dogmatique, presque toujours faussée par une classification arbitraire, mais dans la forme vivante de la raison qui débat pas à pas le problème, en détache les inconnues et l'inventorie avant et après sa solution, dans l'enchaînement de ses aspects et de ses conséquences. Aussi, indiquant toujours les voies multiples que suggère un fait, scrutant les possibilités logiques qui en dérivent, nous efforcerons-nous de nous tenir dans le cadre de la méthode expérimentale et de la méthode critique.

Nous ferons, du reste, bien saisir l'esprit et la portée de cette nouvelle collection, en insistant sur ce point, que la nécessité d'une publication y sera toujours subordonnée à l'opportunité du sujet.

Série Physico-Mathématique.

(Adresser les Communications à M. Ad. Buhl).

1. Poincaré (H.). *La théorie de Maxwell et les oscillations hertziennes.*
2. Maurain (Ch.). *Le magnétisme du fer.*
3. Freundler (P.). *La stéréochimie.*
4. Appell (P.). *Les mouvements de roulement en dynamique.*
5. Cotton (A.). *Le phénomène de Zeemann.*
6. Wallerant (Fr.). *Groupements cristallins; propriétés et optique.*
7. Laurent (H.). *L'élimination.*
8. Raoult (F.-M.). *Tonométrie.*
9. Décombe (L.). *La célérité des ébranlements de l'éther.*
10. Villard (P.). *Les rayons cathodiques.*
11. Barbilion (L.). *Production et emploi des courants alternatifs.*
12. Hadamard (J.). *La série de Taylor et son prolongement analytique.*
13. Raoult (F.-M.). *Cryoscopie.*

14. MACÉ DE LÉPINAY (J.). *Franges d'interférences et leurs applications métrologiques.*
15. BARBARIN (P.). *La géométrie non euclidienne.*
16. NÉCULCÉA (E.). *Le phénomène de Kerr.*
17. ANDOYER (H.). *Théorie de la lune.*
18. LEMOINE (E.). *Géométrographie.*
19. CARVALHO (E.). *L'électricité déduite de l'expérience et ramenée aux principes des travaux virtuels.*
20. LAURENT (H.). *Sur les principes fondamentaux de la Théorie des nombres et de la géométrie.*

Série Biologique.

(Adresser les Communications à M. le Dr LANGLOIS)

1. BARD (L.). *La spécificité cellulaire.*
2. LE DANTEC (F.). *La Sexualité.*
3. FRENKEL (H.). *Les fonctions rénales.*
4. BORDIER (H.). *Les actions moléculaires dans l'organisme.*
5. ARTHUS (M.). *La coagulation du sang.*
6. MAZÉ (P.). *Évolation du carbone et de l'azote.*
7. COURTADE (D.). *L'irritabilité dans la série animale.*
8. MARTEL (A.). *Spéléologie.*
9. BONNIER (P.). *L'orientation.*
10. GRIFFON (ED.). *L'assimilation chlorophyllienne et la structure des plantes.*
11. BOHN (G.). *L'évolution du pigment.*
12. COSTANTIN (J.). *Hérédité acquise.*
13. MENDELSSOHN (M.). *Les phénomènes électriques chez les êtres vivants.*
14. IMBERT (A.). *Mode de fonctionnement économique de l'organisme.*

15-16. LEVADITI (C.). *Le leucocyte et ses granulations.*

Série Physico-Mathématique.

No 1. — La Théorie de Maxwell et les oscillations hertziennes, par H. POINCARÉ, de l'Institut.

TABLE DES MATIÈRES

N° 2. — **Le Magnétisme du Fer,** par Ch. Maurain, ancien élève de l'École normale supérieure, agrégé des Sciences physiques, docteur ès sciences.

TABLE DES MATIÈRES

N° 3. — La Stéréochimie, par P. Freundler, docteur ès sciences, chef de travaux pratiques à la Faculté des sciences de Paris.

TABLE DES MATIÈRES

N° 4. — Les Mouvements de roulement en dynamique, par P. Appell, de l'Institut.

TABLE DES MATIÈRES

d'appliquer directement les équations de Lagrange au nombre minimum des paramètres.

I. Sur les mouvements de roulement.

II. Sur certains systèmes d'équations aux différentielles totales.

Nº 5. — Le Phénomène de Zeeman, par A. Cotton, maître de conférences de physique à l'Université de Toulouse.

TABLE DES MATIÈRES

N° 6. — Groupements cristallins, par Fréd. Wallerant.

TABLE DES MATIÈRES

N° 7. — L'Élimination, par H. Laurent, examinateur à l'École polytechnique.

TABLE DES MATIÈRES

N° 8. — **Tonométrie,** par F.-M. Raoult, membre correspondant de l'Institut. Doyen de la Faculté des sciences de Grenoble.

TABLE DES MATIÈRES

N° 9. — **La Célérité des ébranlements de l'éther,** par L. Décombe, docteur ès sciences.

TABLE DES MATIÈRES

Chap. II. **Histoire de l'éther.** — *Lumière :* Théorie de l'émission.— Théorie des ondulations. — Principe d'Huygens. — Principe de Young. — Travaux de Fresnel. — Expérience de Foucault. — Périodes de vibrations. *Chaleur :* Théorie de l'émission. Calorique. — Rayons de différentes espèces. — Spectre calorique. — Unité du spectre. — Radiations chimiques. — Analogies optiques. — Nature de la chaleur. — Limites extrêmes du spectre. *Électricité :* Polarisation rotatoire magnétique. Nombre v de Maxwell. — Théorie électromagnétique de la lumière.

Chap. III. **Les oscillations hertziennes.** — Formule de Thomson. — Champs oscillants. — Expériences de Feddersen. — Excitateur. — Excitateur de Hertz. — Excitateur de Lodge. — Excitateur de Blondlot. — Résonateur. — Propagation le long d'un fil. — Transparence électromagnétique. — Réflexion métallique. — Réfraction. — Interférences électromagnétiques. — Interférences dans l'espace. — Interférences le long des fils. — Expériences de Righi. — Polarisation. — Double réfraction. — Télégraphie sans fils. — Radioconducteur de Branly. — Conclusions.

Chap. IV. **La formule de Newton.** — Hypothèses. — Centre de vibration. — Ondes sphériques. — Transversalité des vibrations. — Ondes planes.— Formule de Newton. — Influence du milieu. — Théorie de Fresnel. — Théorie de Neumann et de Mac-Cullagh. — Réfraction. — Dispersion.— Cas des phénomènes électriques. — Pouvoir inducteur spécifique. — Perméabilité magnétique.

Chap. V. **La vitesse de la lumière.** — Essais de Galilée. — Les Académiciens de Florence. — Observations de Rœmer. — Calculs de Delambre. — Aberration. — Méthodes physiques. — Méthodes de la roue Dentée. — Expériences de Fizeau. — Expériences de M. Cornu. — Expériences de Young et Forbes. — Méthode du miroir tournant. — Expériences de Foucault. — Expériences de Fizeau et Breguet. — Expériences de Foucault. — Expériences de Micheson. — Expériences de Newcomb.

Chap. VI. **La vitesse de l'électricité.** — Premiers essais. — Principe du miroir tournant. — Expérience de Wheastone. — Méthode des longitudes. — Expériences de Fizeau et Gounelle. — Expériences de Guillemin et Burnouf. — Expériences de Siemens. — Examen critique des méthodes précédentes.

Chap. VII. **La vitesse de propagation de l'onde électromagnétique.** — Expériences de Blondlot 1893. — Expériences de Blondlot 1891. — Mesures directes. — Difficultés. — Expériences de Duane et de Trowbrige. — Expériences de Saunders. — Conclusion.

Chap. VIII. **La dispersion dans le vide.** — Considérations générales. — Observation des satellites de Jupiter. — Observation des étoiles variables. — Observation de MM. Young et Forbes. — Observation des étoiles orbitales. — Principe de Döppler-Fizeau. — Analyse spectrale. — Remarque de M. Tikhoff. — Conclusion.

Chap. IX. **L'éther de Maxwell.** — Constitution de l'éther. — Théorie de Maxwell. — Tourbillons moléculaires. — Déplacement électrique. — Courant électrique. — Courants d'induction. — Vitesse de propagation. — Nombre v de Maxwell. — Théorie électromagnétique de la lumière. — Dispersion dans le vide. — Interférences.

N° 10. — **Les Rayons cathodiques**, par P. Villard, docteur ès sciences.

TABLE DES MATIÈRES

Nº 11. — **Production et Emploi des courants alternatifs,** par L. BARBILLION, docteur ès sciences.

TABLE DES MATIÈRES

Nº 12. — **La Série de Taylor et son prolongement analytique,** par JACQUES HADAMARD.

TABLE DES MATIÈRES

N° 13. — **Cryoscopie,** par F.-M. Raoult, membre correspondant de l'Institut, doyen de la Faculté des sciences de Grenoble.

TABLE DES MATIÈRES

N° 14. — **Franges d'interférence et leurs applications métrologiques,** par J. Macé de Lépinay, professeur à la Faculté des sciences de Marseille.

TABLE DES MATIÈRES

N° 15. — La Géométrie non euclidienne, par P. BARBARIN.

TABLE DES MATIÈRES

N° 16. — Le Phénomène de Kerr, par E. NÉCULCÉA.

TABLE DES MATIÈRES

qualitatifs. — Expériences de Rœntgen. — Expériences de Brongersma. — Résultats quantitatifs. — Phénomène de Kerr dans un champ électrique uniforme. — Projection du phénomène. — Mesures absolues de la constance de Kerr.

Chap. III. **Disparition instantanée du phénomène de Kerr**. — Méthode de M. R. Blondlot. — Expériences de MM. Abraham et J. Lemoine.

DEUXIÈME PARTIE. — *Théorie*. — Chapitre premier. — **Essais théoriques de M. F. Pockels.**

Chap. II. **Théorie de M. W. Voigt**. — Généralités. — Introduction du champ électrique extérieur. — Corps transparents. — Cas d'une bande d'absorption. — Conclusions. — Corps actifs. — Analogue du phénomène de Zeeman. — Corps isotropes ; phénomènes de Kerr. — Généralisation de théorie. — Conclusion.

TROISIÈME PARTIE. — *Phénomène électro-optique analogue au phénomène de Zeeman.*

N° 17. — **Théorie de la lune**, par H. Andoyer, professeur adjoint à la Faculté des sciences de l'Université de Paris.

TABLE DES MATIÈRES

N° 18. — **Géométrographie** ou art des constructions géométriques, par E. Lemoine.

TABLE DES MATIÈRES

N° 19. — L'Électricité déduite de l'expérience et ramenée aux principes des travaux virtuels, par M.-E. Carvallo, docteur ès sciences, agrégé de l'Université, examinateur de mécanique à l'École polytechnique.

TABLE DES MATIÈRES

N° 20. — Sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres et de la géométrie,

par H. Laurent, examinateur à l'École polytechnique.

TABLE DES MATIÈRES

Série Biologique.

N° 1. — La Spécificité cellulaire, ses conséquences en biologie générale, par L. Bard, professeur à la Faculté de médecine de Lyon.

TABLE DES MATIÈRES

N° 2. — La Sexualité, par Félix Le Dantec, docteur ès sciences.

TABLE DES MATIÈRES

N° 3. — Les Fonctions rénales, par H. Frenkel, professeur agrégé à la Faculté de médecine de Toulouse.

TABLE DES MATIÈRES

Chap. III. **Physiologie de la sécrétion rénale.** — Le rein considéré comme filtre. Théorie de Ludwig. Le rein considéré comme glande. Théorie de Bowmann-Heidenhain. Action des substances diurétiques sur la sécrétion rénale. Innervation rénale. Résorption intrarénale.

Chap. IV. **La sécrétion rénale interne.**

Chap. V. **Physiologie pathologique de la sécrétion rénale.** — Les oliguries et les anuries. Les polyuries. Les albuminuries. Rôle du rein dans la production de la glycosurie.

Chap. VI. **De la perméabilité et de l'insuffisance rénales.** — Perméabilité rénale. Méthodes d'examen de la perméabilité rénale. Perméabilité rénale au point de vue qualitatif. Insuffisance rénale. Causes de l'insuffisance rénale. Diagnostic de l'insuffisance rénale. Signes de l'insuffisance rénale.

Conclusions.

N° 4. — **Les Actions moléculaires dans l'organisme,** par H. Bordier, professeur agrégé à la Faculté de médecine de Lyon.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction.

Chapitre premier. **Actions moléculaires dans les solides.** — Élasticité. Élasticité des corps inorganiques. Élasticité des corps organiques. Élasticité des muscles courbes. Élasticité des membranes. Phénomènes d'adhésion. Adhérence des surfaces articulaires.

Chap. II. **Actions moléculaires dans les liquides.** — Tension superficielle. Théorie du professeur Imbert relative à la contraction musculaire. Muscles lisses. Muscles striés. Phénomènes électriques résultant d'une variation de la tension superficielle.

Chap. III. **Actions moléculaires entre liquides différents.** — Osmose. Phénomènes électriques liés aux actions moléculaires de l'osmose.

Chap. IV. **Actions moléculaires entre solides et liquides.** — Phénomènes capillaires. Chapelets capillaires. Phénomènes d'imbibition. Filtration. Phénomènes de dissolution. Pression osmotique. Isotonie. Méthode de H. de Vries. Méthode de Hamburger. Méthode cryoscopique. Liquides de l'organisme. Sécrétion de l'urine. Pression osmotique des liquides de l'estomac. Rôle de la pression osmotique dans la résorption.

Chap. V. **Actions moléculaires entre solides et gaz.** — Phénomènes d'adhésion gazeuse. Atmosphères adhérentes dans l'organisme.

Chap. VI. **Actions moléculaires entre liquides et gaz.** — Dissolution des gaz.

Chap. VII. **Actions moléculaires dans les gaz.** — Diffusion des gaz. Osmose des gaz.

N° 5. — La Coagulation du sang, par Maurice Arthus, professeur de physiologie et de chimie physiologique à l'Université de Fribourg (Suisse).

TABLE DES MATIÈRES

N° 6. — Évolution du Carbone et de l'Azote dans le monde vivant, par P. Mazé, ingénieur-agronome, docteur ès sciences, préparateur à l'Institut Pasteur.

TABLE DES MATIÈRES

CHAP. II. **Origines de l'azote organique.** — Nutrition azotée des plantes. Intervention de l'azote libre. Formation des composés quaternaires dans les végétaux supérieurs.

CHAP. III. **Dégradation de la matière organique.** — Rôle des animaux. Rôle des infiniment petits.

N° 7. — L'Irritabilité dans la série animale,

par le Dr DENIS COURTADE, ancien interne des hôpitaux, ancien chef de laboratoire à la Faculté de médecine, lauréat de l'Institut.

TABLE DES MATIÈRES

N° 8. — La Spéléologie ou science des cavernes,

par E.-A. MARTEL.

TABLE DES MATIÈRES

Chap. III. **Mode d'action des eaux souterraines.** — Érosion. Corrosion. Pression hydrostatique.

Chap. IV. **Circulation des eaux dans l'intérieur des terrains fissurés.** — Absorption par les crevasses, pertes et abîmes. Confusion de la nomenclature. Emmagasinement dans les réservoirs des cavernes et les rivières souterraines. Leur extension en hauteur et longueur. Absence des nappes d'eau. Issue des eaux par les sources.

Chap. V. **Les abîmes. Leur origine.** — Puits d'érosion. Orgues géologiques. Théorie geysérienne. Effondrements. Jalonnement. Dolines. Vallées inachevées. Désobstruction des fonds d'abîmes.

Chap. VI. **Les rivières souterraines. Leur pénétration.** — Aspects divers selon les fissures. Appauvrissement des eaux actuelles. Dessèchement de l'écorce terrestre. Obstacles des rivières souterraines. Siphons. Pression hydrostatique. Tunnels naturels.

Chap. VII. **L'issue des rivières souterraines. Les sources. Les résurgences.** — Les sources siphonantes. Sources pérennes, intermittentes, temporaires. Les trop-pleins. Variations et crues des rivières souterraines. L'évaporation souterraine. Explosions de sources. Age du creusement des cavernes. Sable croulant. Éruptions de tourbières.

Chap. VIII. **Contamination des rivières souterraines.** — L'empoisonnement des résurgences par les abîmes. La source? de Sauve. Expériences à la fluorescéine.

Chap. IX. **La spéléologie glaciaire.** — Écoulements de l'eau sous les glaciers. Poches et débâcles intra-glaciaires. Exploration des moulins et crevasses. Grottes naturelles sous la glace.

Chap. X. **Météorologie souterraine.** — Pression atmosphérique. Irrégularité des températures des cavernes et des résurgences. Application à l'hygiène publique. Acide carbonique des cavernes. Gaz de décomposition organique.

Chap. XI. **Glacières naturelles.** — Influence prépondérante du froid de l'hiver sur leur formation. Trous à vent. Puits à neige.

Chap. XII. **Relations des cavités naturelles avec les filons métallifères.** — Substances minérales rencontrées dans les cavernes. Blue-John-Mine. Pseudomorphoses. Les phosphates.

Chap. XIII. **Les concrétions. Stalactites et stalagmites.** — Calcite, aragonite, ktypéite. Mondmche. Perles des cavernes. Stalagmites d'argile. Eaux perçantes. Influence des eaux courantes, temporaires, stagnantes. Les gours. Les tufs : leur formation et leurs dangers. Le remplissage des cavernes.

Chap. XIV. **Travaux pratiques.** — Désobstruction de pertes. Dessèchement de marais. Recherches de réservoirs naturels. Désobstruction d'abîmes. Reboisement. Indications pour les travaux publics. Expériences scientifiques diverses. Recherches paléontologiques.

Chap. XV. **Préhistoire. Archéologie. Ethnographie.**

Chap. XVI. **Faune et Flore souterraines.** — Les animaux aveugles. Leur origine. Leur existence. Modification de leurs organes. Les chauves-souris. La flore des abîmes. Conclusions.

N° 9. — **L'Orientation,** par le Dr Pierre Bonnier.

TABLE DES MATIÈRES

N° 10. — **L'Assimilation chlorophyllienne et la structure des plantes,** par Ed. Griffon, ingénieur-agronome, docteur ès sciences.

TABLE DES MATIÈRES

N° 11. — **L'Évolution du Pigment,** par le Dr G. BOHN, agrégé des Sciences naturelles, préparateur à la Sorbonne.

TABLE DES MATIÈRES

N° 12. — **L'Hérédité acquise,** ses conséquences horticoles, agricoles et médicales, par M.-J. Costantin.

TABLE DES MATIÈRES

N° 13. — Les Phénomènes électriques chez les êtres vivants, par Maurice Mendelssohn.

TABLE DES MATIÈRES

Nº 14. — **Mode de fonctionnement économique de l'organisme,** par le docteur A. Imbert, professeur à la Faculté de médecine de l'Université de Montpellier, membre correspondant de l'Académie de médecine.

TABLE DES MATIÈRES

Nos 15-16. — **Le Leucocyte et ses granulations,** par le Dr C. Levaditi, chef du Laboratoire de bactériologie et d'anatomie pathologique de l'hôpital Brancovano (Bucharest), lauréat de l'Institut (Académie des

Sciences). Avec une préface par le professeur Paul Ehrlich, directeur de l'Institut de thérapeutique expérimentale de Francfort-sur-le-Mein.

TABLE DES MATIÈRES

Paris. — Imp. E. Capiomont et C^ie, rue de Seine, 57.